工业和信息化“十二五”规划教材

同濟大學 数学系列教材

ADVANCED MATHEMATICS I

高等数学

上册

同济大学数学系 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美

配录微课，共享精品资源

紧扣大纲，符合考研需求

中国工信出版集团 人民邮电出版社 POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化“十二五”规划教材

同济大学 数学系列教材

ADVANCED MATHEMATICS I

高等数学

上册

同济大学数学系 ◎ 编

人 民 邮 电 出 版 社

北 京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 同济大学数学系编. -- 北京 :
人民邮电出版社, 2016.8
同济大学数学系列教材
ISBN 978-7-115-42277-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－
教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第095729号

内 容 提 要

本书是按照教育部大学数学教学指导委员会的基本要求，充分吸取当前优秀高等数学教材的精华，并结合数年来的教学实践经验，针对当前学生的知识结构和习惯特点而编写的。全书分为上、下两册。本书为上册，是一元函数微积分部分，共四章，主要内容包括函数极限与连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用，微分方程。每节前面配有课前导读，核心知识点配备微课，每章后面附有章节测试和拓展阅读。

本书注重知识点的引入方法，使之符合认知规律，更易于读者接受。同时，本书精炼了主要内容，适当降低了学习难度，对部分内容调整了顺序，使结构更加简洁，思路更加清晰。本书还注重知识的连贯性，例题的多样性和习题的丰富性、层次性，使读者在学习数学知识点的同时拓宽了视野，欣赏数学之美。

本书可作为高等院校理工科类各专业的教材，也可作为社会从业人员的自学参考用书。

◆ 编　　　同济大学数学系
责任编辑　武恩玉
执行编辑　许金霞
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：18　　　2016 年 8 月第 1 版
字数：407 千字　　　2016 年 8 月河北第 1 次印刷

定价：39.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

前　　言

本书是同济大学数学系多年教学经验的总结，编者参考了近年来国内外出版的多本同类教材，吸取它们在内容安排、例题配置、定理证明等方面的优点，并结合工科院校的实际需求编写而成的。本书的主要特点如下：

（1）优化编排，重点突出。本书在内容编排上，与初等数学紧密结合，在每一节前设置“课前导读”，帮助读者回顾本节将用到的基础知识，连通知识链，以便更好地学习新的知识。在概念的引入方面，注重从特殊到一般，从具体到抽象，尽量做到易于教、便于学。例如，极限的引入从“庄子”开始，导数的引入从“切线”开始，积分的引入则从“面积”开始；在知识体系和内容上，对有关内容进行了整合，调整了一些内容的先后顺序，使得内容更加紧凑，知识间的联系更紧密。例如，在第一章第二节和第三节中分别给出数列、函数极限的定义，并用定义证明了最基本的结论，紧接着在定义的后面给出了极限的四则运算法则，这样有利于加深读者对极限的理解，从而使读者既能感受到极限定义的严谨，又能体会到极限计算的精彩。另外，把一些极限的性质、定理、证明安排在第四节作为对极限理论有较高要求的选学内容，充分体现“以用为先，以需为度”的原则，以便满足不同读者的需求。

（2）难度适中，帮助理解。高等数学中概念的抽象性一直是一个被反复讨论的话题，刚入学的大学生学习高等数学一般都需要一个适应的过程。为了缩短适应的时间，本书在保证数学概念的准确性及其基本理论完整性的前提下，尽量借助几何直观图形和实际意义进行理论的阐释。例如，极限是微积分的“灵魂”，只有理解这一概念，才能领会微积分的实质。为了清楚阐述这一概念，我们从实际出发，用直观的几何图形给予说明，同时对核心概念的定义配以微课，读者扫描相应的二维码后即可学习，有助于读者对抽象概念的理解；对于极限的“$\varepsilon-N$”类的定义，我们采取淡化处理，只应用定义证明最基本的结论。但为了保持系统的完整性，同时满足读者对继续深造的需要，本书将应用定义证明的性质和定理统一放在了一节中，供不同专业、不同要求的读者选择性学习；对于微分中值定理，编者联系几何、物理问题说明其意义，对其严格证明。同时，还增加了定理应用的例题数量，使读者更快速地掌握定理的内容，以提升读者应用定理论证问题的能力。

（3）习题丰富，题型多样。每章和每节结束时均设置练习题，每节后的习题与该节内容匹配，用以帮助读者理解和巩固基本知识，同时在习题的编排上注重层次感，难易相宜，以满足不同读者的需要；每章后的测试题在题型上更为多样，且难度略高于每节后的基础

习题，用于帮助读者提高，同时也便于读者及时检查学习的效果，拾遗补漏。另外，本书还将部分考研真题编入习题中，以便读者能力的进一步提升。

（4）归纳总结，提升素养。通过微课的形式对每章的内容进行总结。主要包括：说明概念的现实背景、含义与方法；说明本章的基本要求和重点难点，帮助读者系统地归纳本章所学知识；在每章的后面配备了拓展阅读，在增强趣味性的同时让读者能够了解学科背景，拓宽读者视野。

本书由同济大学张弢、殷俊锋编写，全书由张弢统稿。本书在编写和统稿过程中得到了教师同仁和同学的帮助，特别感谢审稿老师认真地审阅了初稿并提出了许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢。

编　者

2016 年 4 月

目　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1

第一节　集合与函数 …… 1

一、集合的概念 …… 1

二、常用函数 …… 4

习题 1 - 1 …… 9

第二节　数列极限的定义与计算 …… 10

一、数列极限的概念 …… 10

二、数列极限的计算 …… 13

习题 1 - 2 …… 15

第三节　函数极限的定义与计算 …… 16

一、自变量趋于无穷大时的极限 …… 16

二、自变量趋于有限值时的极限 …… 18

三、函数极限的计算方法 …… 21

习题 1 - 3 …… 23

第四节　极限性质 …… 24

*一、利用极限定义证明 …… 24

二、数列极限的性质 …… 25

三、函数极限的性质 …… 26

*四、极限运算法则的证明 …… 28

习题 1 - 4 …… 30

第五节　两个重要极限 …… 30

一、夹逼定理 …… 31

二、第一重要极限 …… 33

三、单调有界收敛定理 …… 35

四、第二重要极限 …… 36

习题 1 - 5 …… 38

第六节　无穷小与无穷大 …… 39

一、无穷小 …… 40

二、无穷大 …… 41

三、无穷小与无穷大的关系 …… 42

四、无穷小的比较 …… 42

五、等价无穷小的应用 …… 44

习题 1 - 6 …… 45

第七节　函数的连续性及其性质 …… 46

一、连续的概念 …… 47

二、函数的间断点 …… 49

三、初等函数的连续性 …… 52

四、闭区间上连续函数的性质 …… 54

习题 1 - 7 …… 56

本章小结 …… 59

章节测试一 …… 61

拓展阅读 …… 63

第二章　一元函数微分学及其应用 …… 65

第一节　导数的概念及基本求导公式 …… 65

一、割线与切线 …… 65

二、导数的定义 …… 66

三、简单函数的求导 …… 67

四、左、右导数 …… 68

五、切线与法线方程 …… 69

六、函数的可导性与连续性的关系 …… 70

七、函数的和、差、积、商的求导法则 …… 71

八、反函数的求导法则 …… 72
九、求导公式与基本求导法则 …… 73
习题 2－1 …… 74
第二节　导数的计算法则 …… 75
一、复合函数的求导法则 …… 76
二、高阶导数 …… 78
三、隐函数的导数 …… 81
四、由参数方程确定的函数的导数 …… 82
*五、相关变化率 …… 84
习题 2－2 …… 84
第三节　微分的概念与应用 …… 88
一、微分的定义 …… 88
二、基本初等函数的微分公式及微分法则 …… 90
三、微分的几何意义 …… 92
四、近似计算 …… 92
习题 2－3 …… 93
第四节　微分中值定理及其应用 …… 95
一、罗尔定理 …… 96
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理 …… 98
三、柯西中值定理 …… 100
四、洛必达(L′Hospital)法则 …… 100
习题 2－4 …… 103
*第五节　泰勒中值定理 …… 105
一、多项式逼近函数 …… 105
二、麦克劳林公式 …… 108
三、泰勒公式的应用 …… 109
习题 2－5 …… 111
第六节　函数的性态与图形 …… 111
一、函数单调性的判别 …… 112
二、函数的极值及其求法 …… 115
三、曲线的凹凸性与拐点 …… 118
四、曲线的渐近线 …… 121
五、函数图形的描绘 …… 122
习题 2－6 …… 124
第七节　微分学的实际应用 …… 126
一、最大值、最小值 …… 126
二、曲率 …… 128
习题 2－7 …… 133
本章小结 …… 135
章节测试二 …… 137
拓展阅读 …… 139
第三章　一元函数积分学及其应用 …… 143
第一节　不定积分的概念与性质 …… 143
一、原函数 …… 143
二、不定积分 …… 143
三、基本积分公式 …… 145
四、不定积分的性质 …… 146
习题 3－1 …… 148
第二节　不定积分的换元法与分部法 …… 149
一、第一类换元法(凑微分法) …… 149
二、第二类换元法 …… 155
三、分部积分法 …… 158
习题 3－2 …… 161
*第三节　有理函数的不定积分 …… 164
一、真分式的分解 …… 164
二、有理函数的不定积分 …… 165
三、三角函数的有理式的不定积分 …… 166
四、可化为有理函数的简单无理根式的不定积分 …… 167
习题 3－3 …… 168

第四节　定积分的概念与性质 …… 169
一、实例分析 …… 170
二、定积分的定义 …… 171
三、定积分的几何意义 …… 173
四、定积分的性质 …… 174
习题 3 - 4 …… 177
第五节　微积分基本定理 …… 178
一、变速直线运动的路程 …… 178
二、积分上限函数 …… 179
三、微积分基本定理 …… 182
习题 3 - 5 …… 184
第六节　定积分的换元法和分部法 …… 186
一、定积分的换元法 …… 186
二、定积分的分部法 …… 190
习题 3 - 6 …… 193
第七节　定积分的几何应用与物理应用 …… 195
一、平面图形的面积 …… 195
二、空间立体的体积 …… 201
三、曲线的弧长 …… 205
*四、定积分在物理上的应用举例 …… 207
习题 3 - 7 …… 209
第八节　反常积分 …… 211
一、无限区间上的反常积分 …… 211
二、无界函数的反常积分(瑕积分) …… 214
习题 3 - 8 …… 216
本章小结 …… 217
章节测试三 …… 219
拓展阅读 …… 221

第四章　微分方程 …… 227

第一节　微分方程的概念 …… 227
一、微分方程的引例 …… 227
二、微分方程的基本概念 …… 229
习题 4 - 1 …… 232
第二节　一阶微分方程 …… 233
一、可分离变量方程 …… 233
二、齐次方程 …… 234
三、一阶线性微分方程 …… 236
习题 4 - 2 …… 239
第三节　二阶微分方程 …… 240
一、可降阶的二阶微分方程 …… 240
二、线性微分方程解的结构 …… 242
三、二阶常系数齐次线性微分方程的解法 …… 244
*四、n 阶常系数齐次线性微分方程的解法 …… 247
五、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 …… 248
习题 4 - 3 …… 250
*第四节　微分方程的实际案例 …… 252
一、一阶微分方程的实际案例 …… 252
二、二阶微分方程的实际案例 …… 255
习题 4 - 4 …… 258
本章小结 …… 259
章节测试四 …… 261
拓展阅读 …… 263

习题答案 …… 266

第一章　函数、极限与连续

第一节　集合与函数

[**课前导读**]

在中学数学中,我们学习了集合和函数的概念. 本节在此基础上进一步介绍函数的定义域、表达式、分类及其性质,同时给出初等函数的概念.

集合: 具有某种确定性质的对象的全体称为集合(简称集), 组成集合的个别对象称为集合的元素. 习惯上, 用大写英文字母 A, B, C, …表示集合, 用小写英文字母 a, b, c, …表示集合的元素. $a\in A$ 表示 a 是集 A 的元素(读作 a 属于 A), $a\notin A$ 表示 a 不是集 A 的元素(读作 a 不属于 A). 集合按照元素的个数分为有限集和无限集, 不含任何元素的集合称为空集, 记为$\varnothing$.

函数: 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个非空数集. 如果按照某个法则 f, 对每个数 $x\in D$, 变量 y 总有唯一确定的值与之对应, 则称此对应法则 f 为定义在 D 上的函数, 与 x 对应的值 y 称为 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y=f(x)$. 变量 x 称为自变量, y 称为因变量. 数集 D 称为定义域, $W=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域.

一、集合的概念

设 A, B 是两个集合, 若 A 的每个元素都是 B 的元素(见图1-1), 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$), 读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A"); 若 $A\subset B$ 且 $B\supset A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A=B$; 对于任何集合 A, 规定$\varnothing\subset A$.

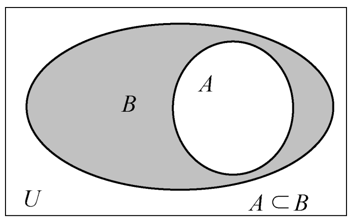


图 1-1

在本书中, 我们把自然数的全体组成的集合称为**自然数集**, 记作 $\mathbf{N}$. 由整数的全体构成的集合称为**整数集**, 记为 $\mathbf{Z}$. 用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数构成的**有理数集**, $\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的**实数集**. 显然有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

一般地, 如果是正整数集, 则记为 $\mathbf{Z}^+$, 负整数集记为 $\mathbf{Z}^-$, 以此类推.

注　在本书中所讨论的数集除特别说明外均为**实数集**.

1. 集合及其运算

集合的基本运算有四种: 交、并、差、补.

设 A, B 是两个集合.

由同时包含于 A 与 B 的元素构成的集合(见图 1-2), 称为 A 与 B 的**交集**(简称交), 记作 $A\cap B$, 即 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$;

由包含于 A 或包含于 B 的所有元素构成的集合(见图 1-3), 称为 A 与 B 的**并集**(简称

并)，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；

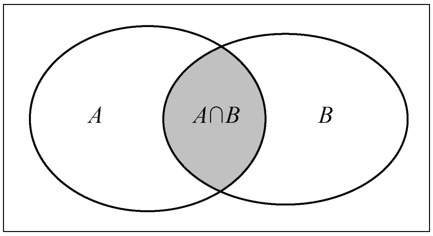


图 1-2

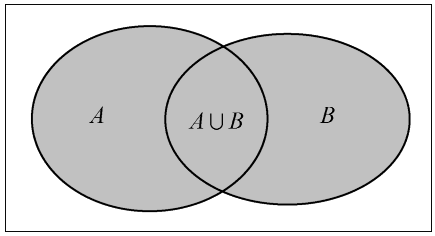


图 1-3

由包含于 A 但不包含于 B 的元素构成的集合(见图 1-4)，称为 A 与 B 的**差集**(简称差)，记作 $A\backslash B$，即 $A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$；

特别地，若我们所讨论的问题在某个集合(称为基本集或全集，一般记为 U)中进行，集合 A 是 U 的子集(见图 1-5)，此时称 $U\backslash A$ 为 A 的**余集**(或**补集**)，记作 C_UA 或 A^C.

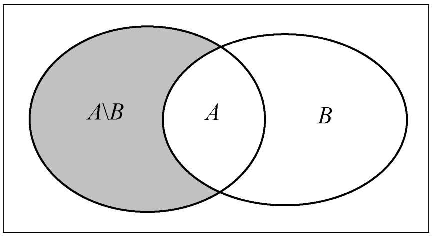


图 1-4

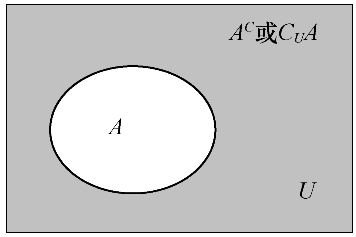


图 1-5

关于集合的余集，我们有如下性质.

性质 1(对偶性质)　设 U 是一个基本集，A，B 是它的两个子集，则

(1) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$；

(2) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

除了集合的四种基本运算，我们还可以定义两个集合的乘积.

设 A，B 是两个非空的集合，则由有序数对 (x, y) 组成的集合

$$A\times B=\{(x, y)\mid x\in A, y\in B\}$$

称为 A 与 B 的**直积**.

例如，设 $A=[0, 1]$，$B=[0, 2]$，则 $A\times B=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$，如图 1-6 所示.

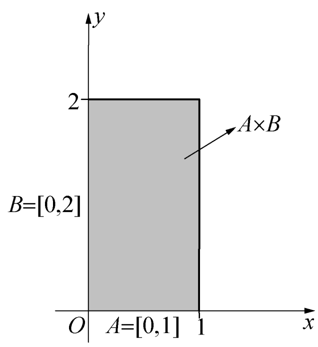


图 1-6

$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

2. 区间

区间是高等数学课程中用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a, b)(见图 1-7)，即

$$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点，其中 a 为左端点，b 为右端点，且 $a\notin(a, b)$，$b\notin(a, b)$.

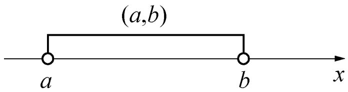


图 1-7

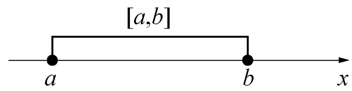


图 1-8

类似地，数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**，记作$[a,b]$（见图 1-8），即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点，且 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

数集$\{x|a\leqslant x<b\}$及$\{x|a<x\leqslant b\}$称为**半开区间**，分别记作$[a,b)$和$(a,b]$（见图 1-9 和图 1-10）.

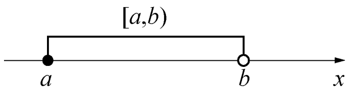


图 1-9

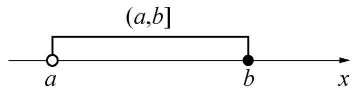


图 1-10

以上这些区间都称为**有限区间**，数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**. 从数轴上看，这些区间是长度为有限的线段.

此外，对于这样的集合：$\{x|x\geqslant a\}$，$\{x|x>a\}$，$\{x|x\leqslant b\}$，$\{x|x<b\}$，我们引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），则可用类似于有限区间的记号来表示无限的半开区间或开区间：

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$
$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

这些区间在数轴上表示长度无限的半直线，如图 1-11～图 1-14 所示.

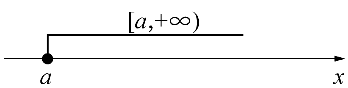


图 1-11

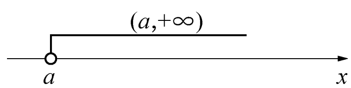


图 1-12

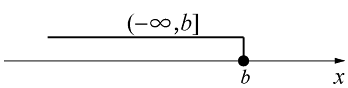


图 1-13

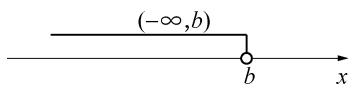


图 1-14

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开区间.

以后如果不需要辩明所讨论的区间是开区间还是闭区间，是有限区间还是无限区间，我们就简单地称其为区间，用“I”代表各种类型的区间.

3. 邻域

设 a 与 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，数集$\{x\mid |x-a|<\delta\}$称为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

其中 a 称作 $U(a,\delta)$的**中心**，δ 称作 $U(a,\delta)$的**半径**.

在数轴上，$|x-a|$表示点 x 与点 a 的距离，因此点 a 的 δ 邻域 $U(a,\ \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 在数轴上就表示与点 a 的距离小于 δ 的点 x 的全体. 由于$|x-a|<\delta$ 等价于$-\delta<x-a<\delta$，即 $a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\ \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

因此，$U(a,\ \delta)$也就是开区间$(a-\delta,\ a+\delta)$（见图 1-15）. 显然，这个开区间以点 a 为中心，长度为 2δ.

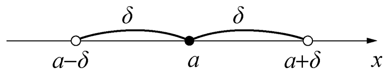


图 1-15

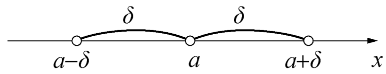


图 1-16

有时用到的邻域需要将邻域中心去掉（见图 1-16），点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里，$0<|x-a|$就表示 $x\neq a$.

为了方便，有时将开区间$(a-\delta,\ a)$称为 a 的左邻域，而将开区间$(a,\ a+\delta)$称为 a 的右邻域.

如果不强调半径，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

二、常用函数

1. 基本初等函数

中学时我们已经学过的许多函数，比如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等，统称为**基本初等函数**. 这些函数在高等数学课程中也将大量出现，我们在这里复习一下中学学过的相关知识，便于我们开始高等数学的学习.

（1）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 是常数）

当 $\alpha\in\mathbf{Z}^{+}$时，$y=x^{\alpha}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$；当 $\alpha\in\mathbf{Z}^{-}$时，$y=x^{\alpha}$ 的定义域是 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$（见图 1-17）.

当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$的定义域是$[0,\ +\infty)$；当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$时，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$的定义域是$(0,\ +\infty)$. 幂函数的最小定义域是$(0,\ +\infty)$.

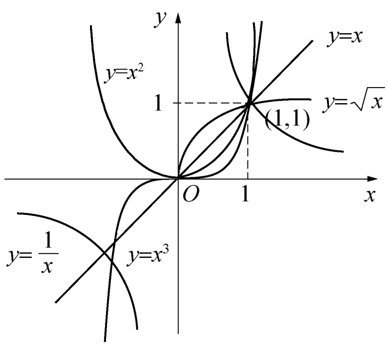


图 1-17

（2）指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$）

如图 1-18、图 1-19 所示，由于对任意 x，$a^{x}>0$，且 $a^{0}=1$，故指数函数的图像在 x 轴的上方，且通过点$(0,\ 1)$.

当 $a>1$ 时，$y=a^{x}$ 是单调增加函数；当 $0<a<1$ 时，$y=a^{x}$ 是单调减少函数.

以 e=2.718 281 8…为底的指数函数记为 $y=\mathrm{e}^{x}$，在工程技术上经常用到这个指数函数.

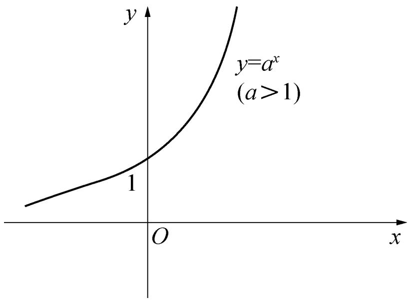


图 1-18

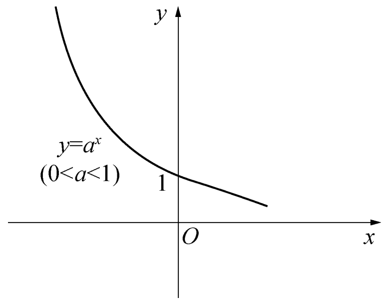


图 1-19

（3）对数函数：$y=\log_a x(a>0，a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_a x(a>0，a\neq 1)$的定义域是$(0，+\infty)$，其图像位于 y 轴的右方且通过点$(1，0)$. 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是单调增加函数(见图 1-20)；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是单调减少函数(见图 1-21). 当 $a=\mathrm{e}$ 时的对数函数记为 $y=\ln x$，称为**自然对数函数**.

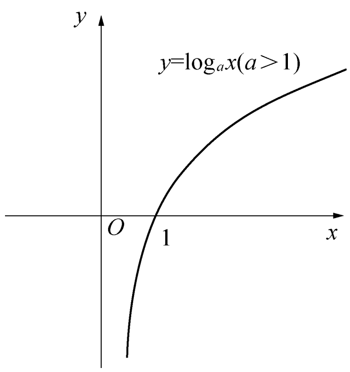


图 1-20

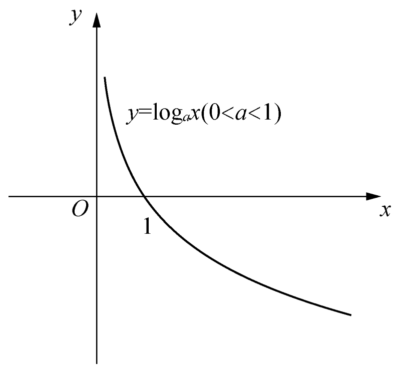


图 1-21

对数具有以下运算性质：对任意的 $x，y\in\mathbf{R}^+$，$a>0$，$a\neq 1$，$b\in\mathbf{R}$，

（ⅰ）$\log_a x+\log_a y=\log_a xy$；

（ⅱ）$\log_a x-\log_a y=\log_a \dfrac{x}{y}$；

（ⅲ）$\log_a x^b=b\log_a x$.

$y=\log_a x$ 和 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，且有 $a^{\log_a x}=x$. 进一步，我们在以后的计算中经常会用到

$$\mathrm{e}^{\ln x}=x \text{ 和 } \mathrm{e}^{a\ln x}=\mathrm{e}^{\ln x^a}=x^a.$$

（4）三角函数

正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$ 统称为**三角函数**.

$y=\sin x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是$[-1，1]$，最小正周期是 2π，它是奇函数(见图 1-22)；

$y=\cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是$[-1，1]$，最小正周期是 2π，它是偶函数(见图 1-23)；

$y=\tan x$ 的定义域是$\left\{x \mid x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi，k=0，\pm1，\pm2，\cdots\right\}$，值域是$(-\infty，+\infty)$，最小正周

期是 π，在定义域上是奇函数(见图 1-24)；

$y=\cot x$ 的定义域是$\{x\mid x\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$，值域是$(-\infty,\ +\infty)$，最小正周期是 π，它是奇函数(见图 1-25)；

正割、余割函数与余弦、正弦函数的关系式为

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x},\qquad y=\csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

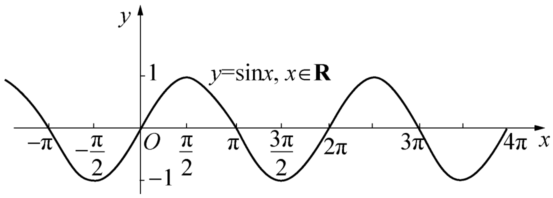


图 1-22

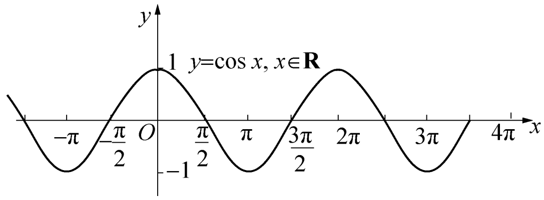


图 1-23

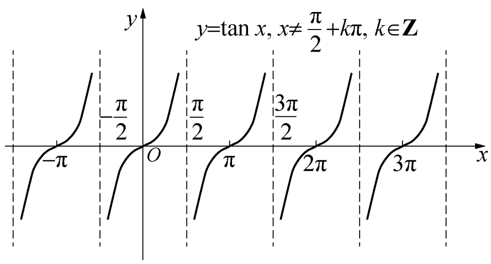


图 1-24

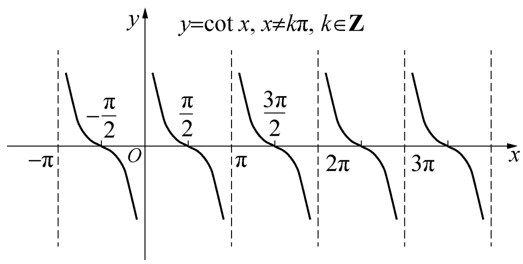


图 1-25

(5) 反三角函数

定义 1　在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的正弦函数的反函数记作 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1,\ 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，称为**反正弦函数**(见图 1-26)；

定义 2　在区间$[0,\ \pi]$上的余弦函数的反函数记作 $y=\arccos x$，定义域为$[-1,\ 1]$，值域为$[0,\ \pi]$，称为**反余弦函数**(见图 1-27)；

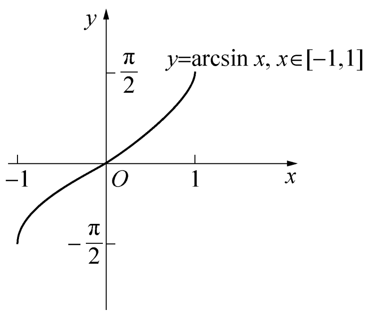


图 1-26

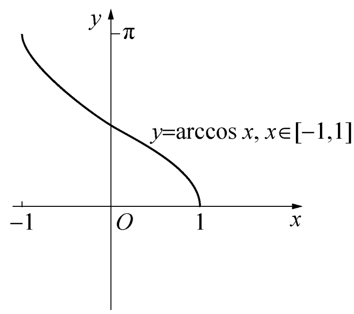


图 1-27

定义 3　在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上的正切函数 $y=\tan x$ 的反函数记作 $y=\arctan x$，定义域是$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，称为**反正切函数**，在整个定义域上是单调递增函数(见图

1−28)；定义在区间(0，π)上的余切函数 $y=\cot x$ 的反函数为 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域为(0，π)，称为**反余切函数**，在整个定义域上是单调递减函数(见图1−29).

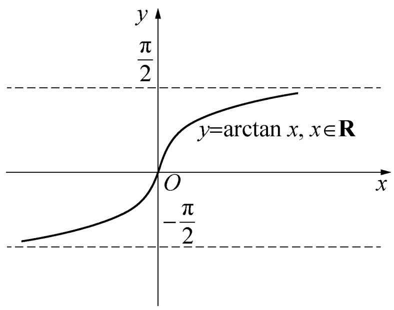


图 1−28

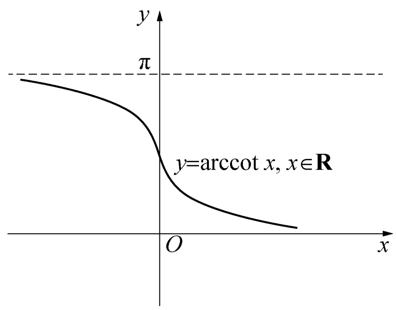


图 1−29

三角函数的反函数统称为**反三角函数**.

2. 几类特殊的函数

除五类基本函数以外，我们还需要了解下列函数.

例 1　函数 $y=C$，其中 C 为某确定的常数. 它的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $W=\{C\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线(见图 1−30)，这个函数称为**常数函数**.

例 2　函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，它的图形如图 1−31 所示，这个函数称为**绝对值函数**.

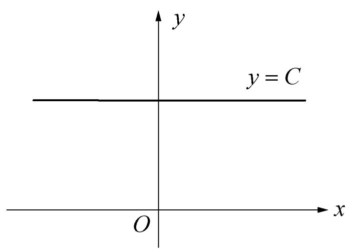


图 1−30

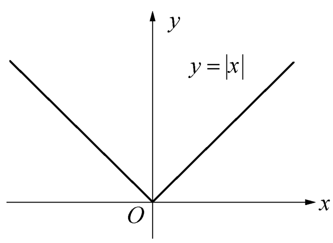


图 1−31

例 3　函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1, 0, 1\}$，它的图形如图 1−32 所示，这个函数称为**符号函数**.

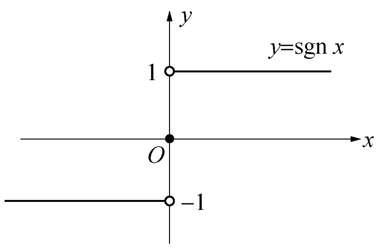


图 1−32

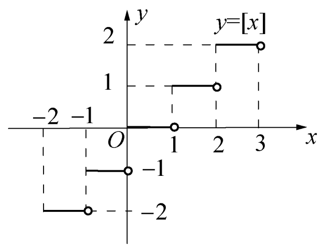


图 1−33

对于任何实数 x，关系式 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 恒成立.

例 4　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 函数 $y=[x]$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 $\mathbf{Z}$，它的图形如图 1-33 所示. 可以看出，它的图形在 x 的整数值处出现跳跃，而跃度为 1，这个函数称为**取整函数**.

比如，$[0.5]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-0.5]=-1$，一般地，有

$$[x]=n，当 x\in[n,n+1)，n=0，\pm1，\pm2，\cdots.$$

在例 2、例 3 等例子中看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种自变量在不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**. 分段函数在实际问题中经常出现，我们应重视对它的研究.

例 5　函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant1,\\ x-1, & x<1\end{cases}$ 是一个分段函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 当 $x\in(-\infty,1)$ 时，对应的函数值 $f(x)=x-1$；当 $x\in[1,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=x^3$. 它的图形如图 1-34 所示.

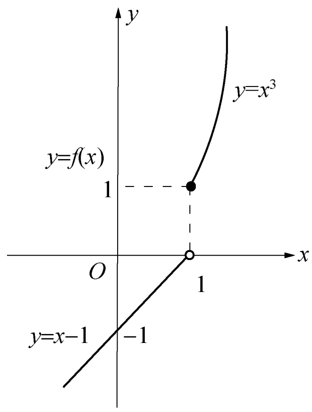


图 1-34

例如，$-1\in(-\infty,1)$，则 $f(-1)=-1-1=-2$；$1\in[1,+\infty)$，则 $f(1)=1^3=1$.

3. 初等函数

我们把由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次函数复合所构成的，并可以用一个算式表示的函数统称为**初等函数**. 例如，$y=\sin\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x^2-1}$ 都是初等函数，本书中讨论的函数基本上都是初等函数. 对于初等函数，我们来研究一下它们的表达式和定义域.

例 6　设 $f(x)=2^x$，$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$x\neq0$，$x\neq1$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 和 $f[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=2^{g(x)}=2^{\frac{1}{1-x}}(x\neq1)$.

$$g[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-2^x}(x\neq0).$$

$$f[f(x)]=2^{f(x)}=2^{2^x}(x\in\mathbf{R}).$$

例 7　求函数 $y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$ 的定义域.

解　所给函数由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=x^2-3$ 复合而成. $y=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，即 $\ln v\geqslant0$，从而 $v=x^2-3\geqslant1$. 解这个关于 x 的不等式，得 $|x|\geqslant2$. 因此，函数 $y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$ 的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

例 8　设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，求 $f(\sin x)$ 的定义域.

解　函数 $f(\sin x)$ 由 $f(u)$，$u=\sin x$ 复合而成. 因为 $f(u)$ 的定义域为 $(0,1)$，故必有 $u=\sin x$ 的值域是 $(0,1)$，即 $\sin x\in(0,1)$. 因此，开区间 $(2n\pi,(2n+1)\pi)(n\in\mathbf{Z})$ 的并即为 $f(\sin x)$ 的定义域.

习题 1-1

1. 设 A, B 分别为下列两个给定的集合：

（1）$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$；

（2）$A=\mathbf{Z}^+$，$B=\mathbf{N}$；

（3）$A=\{x|3<x<5\}$，$B=\{x|x>4\}$；

（4）$A=\{x|x^2+x-6<0\}$，$B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$；

试求 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.

2. 设 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$A=\{2, 3, 4\}$，$B=\{3, 6, 7\}$，求 A^C, B^C, $A^C\cap B^C$, $(A\cup B)^C$.

3. 设 A, B 都是集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 的子集，且 $A^C\cap B^C=\{1, 3, 7, 9\}$，试求 $A\cup B$.

4. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围：

（1）$2<x\leqslant 6$；　　（2）$|x|<3$；

（3）$|x-2|<\dfrac{1}{10}$；　　（4）$|x|>100$；

（5）$0<|x-1|<0.01$；　　（6）$0<|x-2|\leqslant 5$.

5. 设 $x\in U(1, \delta)$ 时，$|2x-2|<\varepsilon$，当 ε 分别等于 0.1 和 0.01 时，求邻域半径 δ 各等于多少.

6. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-5x+6}}$；　　（2）$y=4\sqrt{3x+2}+2\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

（3）$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$；　　（4）$y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$；

（5）$y=\dfrac{2}{|x|-x}+\sqrt{\ln(3+x)}$；　　（6）$y=\dfrac{1}{[x+1]}$；

（7）$y=f(x^2+1)$，其中 $f(x)$ 的定义域是 $[1, 2]$；

（8）$y=f(\sin x)+f(\ln x)$，其中 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f(1)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f(-3)$.

8. 设 $f(x)=\sqrt{\sin x}+2\cos^2 x$，求 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. 设 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}(x\neq 0, x\neq 1)$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

11. 设 $f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2x^2-2x+1}-1(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

12. 设 $f(x)=3x^2+4x$，$\varphi(t)=\lg(1+t)$，求 $f[\varphi(t)]$，$\varphi[f(x)]$ 及其定义域.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$

（1）写出 $f(x)$ 的定义域，并画出函数 $f(x)$ 的图形；

（2）求 $f(0)$，$f(1.2)$，$f(3)$，$f(4)$.

14. 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0, \\ e^x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求复合函数 $f[f(x)]$.

15. 试将函数 $f(x)=2|x-2|+|x-1|$ 表示成分段函数，并画出它的图像.

第二节　数列极限的定义与计算

［课前导读］

极限的概念是为求某些实际问题的精确解答而产生的. 有许多实际问题的精确解，仅仅通过有限次的算术运算是求不出的，而需要考察一个无限变化过程，由此产生了极限的理论与方法. 这一节介绍数列极限的定义，怎样用定义来证明极限，以及数列极限的计算方法. 在正式介绍极限的定义之前，需要回顾一下数列的相关知识.

数列 $\{x_n\}$：$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，我们把这无穷多个数排成的序列称为数列，其中 x_1 称为数列的首项，x_n 称为数列的第 n 项，或称为数列的一般项（通项）.

等差数列 $\{x_n\}$：公差 $d=x_n-x_{n-1}\in\mathbf{R}$，通项公式为 $x_n=x_1+(n-1)d$，

$$\text{前 } n \text{ 项求和公式为 } S_n=\frac{n(x_1+x_n)}{2}.$$

等比数列 $\{x_n\}$：公比 $q=\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$，通项公式为 $x_n=x_1\cdot q^{n-1}$，

$$\text{前 } n \text{ 项求和公式为 } S_n=\frac{x_1(1-q^n)}{1-q}.$$

一、数列极限的概念

1. 数列极限的引入

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

——《庄子·天下篇》

一尺长的木棍，每天截掉一半，每天截取的长度按照天数可排成一个数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,$$

数列的通项为 $\dfrac{1}{2^n}$. 当 n 无限增大（记作 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大）时，$\dfrac{1}{2^n}$ 无限接近一个

确定的数 0. 在数学上称这个确定的数 0 是数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$当 $n\to\infty$ 时的极限.

解决实际问题时，经常用到极限方法. 极限方法作为高等数学中的一种基本方法，很有必要做进一步详细的讨论. 先看下面的 4 个数列.

（1）$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$;

（2）$1,\ 3,\ 3^2,\ \cdots,\ 3^{n-1},\ \cdots$;

（3）$1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$;

（4）$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+(-1)^{n+1}}{n},\ \cdots$.

它们的一般项依次为

$$\frac{1}{n},\ 3^{n-1},\ (-1)^{n-1},\ \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}.$$

在几何上，数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一个动点，如图 1-35 所示，它依次取数轴上的点 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$.

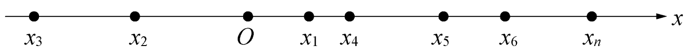


图 1-35

按函数的定义，数列$\{x_n\}$可看作自变量为正整数 n 的函数，即

$$x_n=f(n),$$

它的定义域是全体正整数. 当自变量 n 依次取 1，2，3，…时，对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

现在我们所关心的问题是：

（1）给定一个数列后，该数列的变化趋势如何？随着 n 的无限增大，x_n 能否无限接近某个常数？

（2）如果能无限接近某个确定的数，则该常数是多少？

可以看出，在前面所列的 4 个数列中，当 $n\to\infty$ 时，数列(1)的一般项 $x_n=\frac{1}{n}$将无限接近于常数 0. 数列(4)的一般项 $x_n=\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$将无限接近于常数 1. 而数列(2)的一般项 $x_n=3^{n-1}$却在无限增大，它不接近于任何确定的数值. 数列(3)的一般项 $x_n=(-1)^{n-1}$始终交替地取值为 1 和−1，不接近于任何确定的数值. 据此，我们可以认为，数列(1)和(4)是“有极限”的，而数列(2)和(3)是“无极限”的.

从上述各例观察可以看到，数列的一般项变化趋势有两种情况：无限接近于某个确定的常数和不接近于任何确定的常数. 这样就可以得到数列的描述性定义.

如果当数列$\{x_n\}$的项数 n 无限增大时，它的一般项 x_n 无限接近于一个确定的常数 a，则称 a 为数列$\{x_n\}$的极限. 此时也称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，或 $x_n\to a\ (n\to\infty)$. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}=1$.

如果当数列$\{x_n\}$的项数n无限增大时，它的一般项x_n不接近于任何确定的常数，则称数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列$\{x_n\}$发散，习惯上记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$不存在.

当数列$\{x_n\}$的项数n无限增大时，如果$|x_n|$也无限增大，则数列$\{x_n\}$没有极限. 此时，习惯上也称数列$\{x_n\}$的极限是无穷大，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty} 3^{n-1}=\infty$.

2. 数列极限的定义

在上述极限的描述性定义中，我们都是用“无限增大”和“无限接近”来描述极限概念的. 为了给极限一个精确的定义，关键是要给予“无限增大”和“无限接近”以定量的刻画.

一般来说，两个数a、b的接近程度可用$|b-a|$来度量.

我们以数列$\{x_n\}$：$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}=1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$为例.

考虑$|x_n-1|=\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，显然，$n$越大，$x_n$就越“接近”1. 只要$n$足够大，$|x_n-1|$就可以小于任何给定的正数. 如果要求$|x_n-1|<\dfrac{1}{100}$，即$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{100}$，只要$n>100$，这时$x_{101}$，$x_{102}$，…均能使不等式$|x_n-1|<\dfrac{1}{100}$成立. 同样，如果要求$|x_n-1|<\dfrac{1}{10\ 000}$，即$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{10\ 000}$，只要$n>10\ 000$，这时$x_{10\ 001}$，$x_{10\ 002}$，…均能使不等式$|x_n-1|<\dfrac{1}{10\ 000}$成立.

一般地，不论给定的正数ε多么小，总存在一个正整数N，使得对于$n>N$时的一切n，不等式$|x_n-1|<\varepsilon$均成立，这就是数列$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}$当$n\to\infty$时无限“接近”于1的精确刻画，这个数1就是$x_n$的极限.

定义　设$\{x_n\}$为一数列，如果存在一个常数$a\in\mathbf{R}$，对于任意给定的正数ε，总存在一个正整数N，使得对于$n>N$时的一切n，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$均成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a，\text{或 } x_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果这样的常数a不存在，就称数列没有极限，或称数列发散.

我们用“$\forall$”表示“任意的”，用“$\exists$”表示“存在”，就可以用更简洁的语言来描述数列的极限.

如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{Z}^+$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

注　(1) 定义中，ε刻画了x_n和a的接近程度，ε的“任意”性极其重要. 只有这样，$|x_n-a|<\varepsilon$才能体现x_n和a的“无限接近”；

(2) 正整数N与任意给定的正数ε有关. 对于给定的ε，相应的N不是唯一的，即只要其存在，并没有要求其达到最小；

(3) 由定义也可看出，$\{x_n\}$的极限是否存在仅与它的发展趋势有关. 只要从某项N开始，$|x_n-a|<\varepsilon$即可，与前有限项的变化无关.

下面给出“数列$\{x_n\}$的极限为a”的几何解释.

若在数轴上标出 x_1，x_2，…，x_n，…及 a，再作 a 的 ε 邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$（见图 1-36），就会发现，当 $n>N$ 时，点 x_n 均落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，至多有有限个（N 个）落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 外.

必须指出，数列的定义可用于验证 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，但却无法用于求极限.

数列极限几何解释

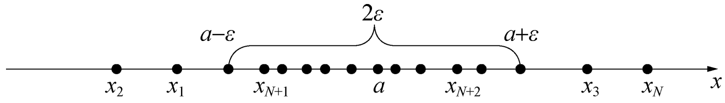


图 1-36

例 1　已知 $x_n=\dfrac{1}{n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-0|<\varepsilon$，故数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 的极限为 0，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

例 2　已知 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，（不妨设 $\varepsilon<1$，想想为什么可以这样假设.）要使

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon,$$

即 $2^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，等式两端同时取对数，$n\ln2>\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$，从而 $n>\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln2}$，取 $N=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln2}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-0|<\varepsilon$，故数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 的极限为 0，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

由例 2 的证明可以发现，对于任意的 $0<|q|<1$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. 请感兴趣的读者自行证明.

二、数列极限的计算

极限的定义只能用来验证极限，而不能计算数列的极限，所以下面给出数列极限的运算法则.

定理（数列极限的运算法则）　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$；（加减法则）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$；（乘法法则）

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\sqrt{a}\,(x_n\geqslant 0,\ a\geqslant 0)$；（交换法则）

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}\,(\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0)$.（除法法则）

定理的证明见第一章第四节.

例 3 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-7n^2}{n^2+3}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$.

解 （1）将分子、分母同时除以 n^2，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^2}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{n^2}\right)-7}{1+\left(\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{0-7}{1+0}=-7.$$

（2）利用等差数列求和公式，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

（3）利用数列的交换法则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\sqrt{1+0}=1.$$

（4）由 $\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，可知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.\end{aligned}$$

（5）先将分子有理化，再利用数列极限的运算法则，可得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

（6）利用等比数列求和公式，可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{3}{2}.$$

习题 1-2

1. 下列各题中的数列$\{x_n\}$，哪些收敛？哪些发散？对于收敛数列，通过观察得出数列的极限：

（1）$x_n=\dfrac{1}{a^n}(a>1)$；　　（2）$x_n=2^{\frac{1}{n}}$；

（3）$x_n=(-1)^n n$；　　（4）$x_n=\dfrac{n+2}{n+3}$；

（5）$x_n=\dfrac{n}{2^n}$；　　（6）$x_n=\ln\dfrac{1}{n}$；

（7）$x_n=\dfrac{n}{n^2+1}$；　　（8）$x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$；

（9）$x_n=0.\underbrace{999\cdots9}_{n}$；　　（10）$x_n=\dfrac{\sin n}{(n+1)^2}$.

2. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{2n^2+3n}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n-1}$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}-\dfrac{n}{2}\right)$；　　（6）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$；　　（8）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n^2]{2}\cdot\sqrt[n^2]{2^2}\cdot\sqrt[n^2]{2^3}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n^2]{2^n})$；

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$；

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2\,016}}{n^k-(n-1)^k}=A\neq0$，求 k 的值.

*4. 下列说法作为 a 是数列$\{x_n\}$的极限，哪些是对的？哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

（1）对于无穷多个 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，当 $n>N$ 时，使得不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

（2）对于任给的 $\varepsilon>0$，任给 $N\in\mathbf{Z}^+$，存在 $n>N$，使得不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

（3）对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，当 $n\geqslant N$ 时，使得不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

（4）对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，当 $n>N$ 时，使得不等式$|x_n-a|<k\varepsilon$，$k\in\mathbf{R}^+$成立；

（5）对于任给的 $m\in\mathbf{Z}^+$，存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，当 $n>N$ 时，使得不等式$|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$成立.

*5. 下列结论是否成立？若成立，给出证明；若不成立，请举出反例.

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(a\neq0)$；

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 必不存在；

（4）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 必不存在；

（5）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)$ 必不存在；

（6）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$.

第三节　函数极限的定义与计算

［课前导读］

这一节介绍函数极限的定义. 在前一节，我们探讨了数列的极限. 数列的通项可以看成一类特殊的函数 $x_n=f(n)$，那么数列极限就变成了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=a$，这里 $n\in\mathbf{Z}^+$. 如果我们把函数的定义域扩充到 $\mathbf{R}$，那么就变成了函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

本节将介绍自变量趋于无穷大($x\to\infty$)和自变量趋于固定值($x\to x_0$)时的两种函数的极限.

一、自变量趋于无穷大时的极限

自变量趋于无穷大，包括三种情况：$x>0$ 且 $|x|$ 无限增大，则记作 $x\to+\infty$；$x<0$ 且 $|x|$ 无限增大，则记作 $x\to-\infty$；如果 x 既可以取正值，又可以取负值且 $|x|$ 无限增大，则记作 $x\to\infty$.

我们先观察函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=\arctan x$ 的图像.

对于函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像（见图 1-37），$|x|$ 无限增大时，曲线无限接近于 x 轴，即 $y=0$. 对于函数 $y=\arctan x$ 的图像（见图 1-38），当 $x>0$ 且 $|x|$ 无限增大时，曲线无限接近于直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$；而当 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时，曲线无限接近于直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$.

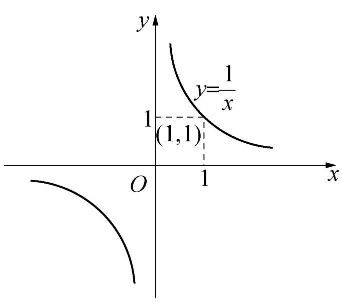


图 1-37

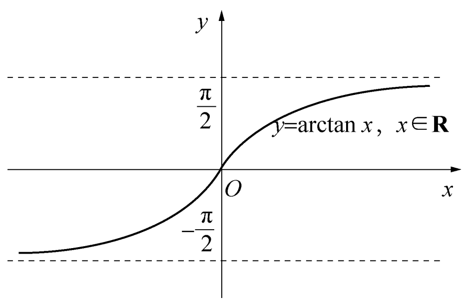


图 1-38

一般地，我们假设函数 $f(x)$ 在 $x>X$（X 为某一正数）时有定义，如果在 $x\to+\infty$ 过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限. 精确地说，就有如下定义.

定义 1　设函数 $f(x)$ 当 x 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $x>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\text{，或 }f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

定义 1 也可简述为以下形式.

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

同样，我们也可以定义当 $x\to-\infty$ 时的函数 $f(x)$ 的极限.

若 $x<0$ 且 $x\to\infty$，即 $x\to-\infty$ 时，有 $f(x)\to A$，或记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，即如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 时，我们就得到 $x\to\infty$ 时的函数 $f(x)$ 的极限定义.

如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

下面看一下极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何解释.

对任意给定的 $\varepsilon>0$，作直线 $y=A-\varepsilon$ 及 $y=A+\varepsilon$，总存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$y=f(x)$ 的图形必位于这两直线之间（见图 1-39）.

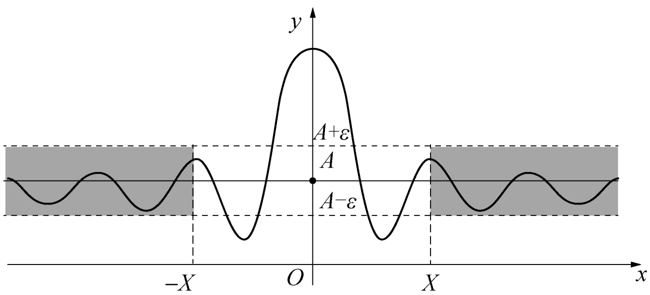


图 1-39

函数极限的几何解释（趋于无穷大）

显然可以得到下面的结论.

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

很容易看出，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

直线 $y=0$ 称为函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 图形的水平渐近线.

同理，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在，因为

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 称为函数 $y=\arctan x$ 图形的水平渐近线.

注　一般地，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，那么称直线 $y=A$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的**水平渐近线**.

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

证明　$|f(x)-A|=\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{|x|}<\dfrac{1}{|x|}$.

对 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

只需

$$\frac{1}{|x|}<\varepsilon,$$

即 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|=\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

二、自变量趋于有限值时的极限

我们先看两个实例，再给出当 $x\to x_0$（x_0 为有限值）时函数极限的定义.

观察以下两个函数的图像，可以发现，对于函数 $f(x)=x+1$，当 x 越来越接近 1 时，$f(x)$ 无限接近于常数 2，即当 x 从 1 的左侧或右侧趋向于 1 时，$|(x+1)-2|$ 可以无限接近于零（见图 1-40）；类似地，对 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，尽管 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，但当 x 从 1 的左侧或右侧趋向于 1 时，$f(x)$ 仍无限接近于常数 2，即 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|$ 可以无限接近于零（见图 1-41）.

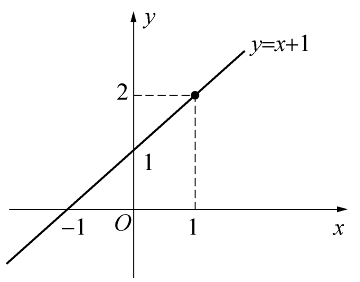


图 1-40

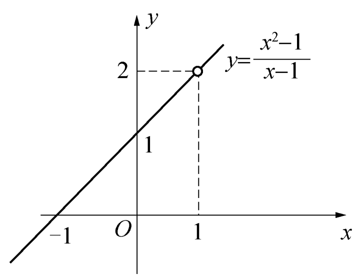


图 1-41

一般地，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限. 所谓"$f(x)$ 无限接近于确定的数值"，实质上等价要求 $|f(x)-A|$ 能任意小，而这"任意小"又可用 $|f(x)-A|<\varepsilon$（其中 ε 为任给的正数）来刻画. 又由于这"任意小"是在 $x\to x_0$ 的过程中实

现的，也就是仅要求 x 充分接近 x_0 时，使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 就行了.

综上所述，得到 $x\to x_0$ 时函数极限的定义.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时函数的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

定义 2 也可简述为

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0，\text{当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时，恒有 } |f(x)-A|<\varepsilon，\text{那么} \lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

注 这里 δ 与 ε、x_0 有关.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何解释如下.

任意给定一正数 ε，作平行于 x 轴的两直线：$y=A+\varepsilon$ 及 $y=A-\varepsilon$. 存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\ (x\neq x_0)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 位于两条直线 $y=A+\varepsilon$ 及 $y=A-\varepsilon$ 之间（见图 1-42）.

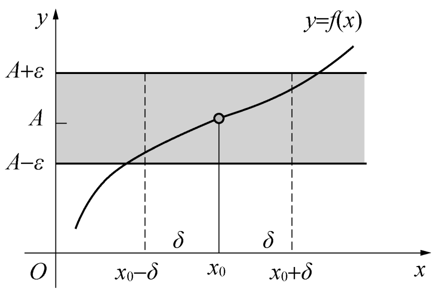


图 1-42

函数极限的几何解释（趋于定点）

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon,$$

只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

这个例子告诉我们，$y=x$ 当 $x\to x_0$ 时的极限就是这一点的函数值 x_0. 比如，当 $x\to 2$ 时，$y=x$ 的极限就是 2.

例 3 证明当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<1$，要使 $|a^x-1|<\varepsilon$，即 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$，只要

$$-\log_a\frac{1}{1-\varepsilon}<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

取 $\delta=\min\left\{\log_a\dfrac{1}{1-\varepsilon},\ \log_a(1+\varepsilon)\right\}$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，恒有

$$|a^x-1|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to 0}a^x=1.$$

注 一般地，我们有 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.

例 4　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\,(x_0>0)$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-A|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|<\varepsilon,$$

即

$$|x-x_0|<\sqrt{x_0}\,\varepsilon,$$

又要求 $x\geqslant 0$，即 $|x-x_0|\leqslant x_0$，取 $\delta=\min\{x_0,\ \sqrt{x_0}\,\varepsilon\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon.$$

注　用同样的方法可以证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x_0}$.（这个结论可以推广到更一般的 n 次根式.）

上述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中的“$x\to x_0$”是指 x 可以取 x_0 左侧的点（$x<x_0$）而趋于 x_0，也可以取 x_0 右侧的点（$x>x_0$）而趋于 x_0. 有时我们只需考虑 x 从 x_0 的一侧（左侧或右侧）趋于 x_0，这时就需要将上述情况分别讨论.

如果 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）时，$f(x)$ 趋于 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的右极限，记作

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}}f(x)=A.$$

如果 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0^-$）时，$f(x)$ 趋于 A，则称 A 为 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}}f(x)=A.$$

显然有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$.

因此如果 $f(x_0^+)$、$f(x_0^-)$ 中有一个不存在，或两个虽存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

由于 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在（见图 1-43）；

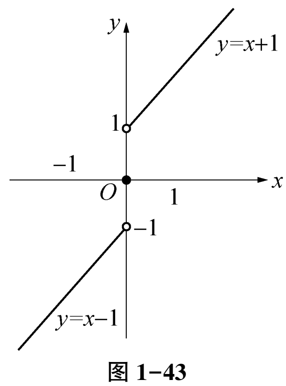


图 1-43

再比如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

三、函数极限的计算方法

极限的定义只能用来验证函数的已知极限，那么如何计算(求)函数的极限呢？要讨论极限的求法，首先要建立相关的一些运算规则，比如极限的四则运算法则、复合函数的极限运算法则等. 有了这些工具，我们就可求函数的极限了. 我们以 $x\to x_0$ 为例，讨论函数极限的性质.

定理 2(函数极限的四则运算法则)　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}(B\neq 0)$.

定理 2 的证明见第一章第四节.

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\beta\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n(n\in\mathbf{Z}^+)$；

(3) 若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$.

上述极限中，将“$x\to x_0$”改为“$x\to\infty$”，结论仍然成立.(证明过程有所差别)

按照四则运算法则，我们很容易计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1=2+1=3$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+3\lim\limits_{x\to 2}1}=\dfrac{8-1}{4-10+3}=-\dfrac{7}{3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{3}{7}$.

注　(1) 设 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}P_n(x)&=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n)\\&=\left(a_0\lim_{x\to x_0}x^n+a_1\lim_{x\to x_0}x^{n-1}+a_2\lim_{x\to x_0}x^{n-2}+\cdots+a_n\lim_{x\to x_0}1\right)\\&=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+a_2x_0^{n-2}+\cdots+a_n=P_n(x_0);\end{aligned}$$

(2) 设 $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$，其中 $P_n(x)$、$Q_m(x)$为多项式，$Q_m(x_0)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q_m(x)}=\frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}=f(x_0).$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to1}x^2+2x-3=1^2+2\times1-3=0$，即分母的极限为零，所以不能直接应用极限运算法则. 我们先利用多项式的因式分解，约去公因式后，再利用函数极限的四则运算法则进行运算.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

例 6　计算$\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x)^2}$.

解　因分母的极限为零，要先对函数做必要的变形；因分子中含有根式，通常用根式有理化，然后约去分子、分母中的公因子.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x)^2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1-x)}{(1-x)^2(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

定理 3(复合函数的极限运算法则)　设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $u=g(x)$与 $y=f(u)$复合而成的，$f[g(x)]$在点 x_0 的去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证明见第一章第四节.

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to0}e^{x+1}$.

解　记 $u=x+1$，由于$\lim\limits_{x\to0}(x+1)=0+1=1$，故$\lim\limits_{x\to0}e^{x+1}=\lim\limits_{u\to1}e^u=e^1=e$.

例 8　求极限$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x^2+4}+2)$.

解　记 $u=x^2+4$，由于$\lim\limits_{x\to0}(x^2+4)=0+4=4$，故

$$\lim_{x\to0}(\sqrt{x^2+4}+2)=\lim_{u\to4}(\sqrt{u}+2)=\sqrt{4}+2=4.$$

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\frac{x^2-1}{2(x-1)}}$.

解一　令 $u=\frac{x^2-1}{2(x-1)}$，则当 $x\to1$ 时，$u=\frac{x^2-1}{2(x-1)}=\frac{x+1}{2}\to1$，故原式$=\lim\limits_{u\to1}\sqrt{u}=1$.

解二　$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\frac{x^2-1}{2(x-1)}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2(x-1)}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2}}=\sqrt{1}=1$.

例 10　（1）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$；（2）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

解　（1）当 $x\to 0$ 时，分母$\sqrt{x^2+4}-2$ 的极限为零，故不能直接应用商的极限运算法则. 但若采取将分母有理化，即将分子与分母同时乘$\sqrt{x^2+4}+2$，则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}{(x^2+4)-4}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+4}+2)=2+2=4.$$

（2）当 $x\to+\infty$ 时，分子与分母都没有极限，故也不能直接应用商的极限运算法则，需先将分子、分母同时除以 x.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}}=1.$$

例 11　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求 a，b 的值.

解　因

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=2\end{aligned}$$

故

$$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases}$$

解得

$$a=25,\ b=20.$$

习题 1-3

1. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-3x+1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+5x-6}$；　　（6）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x-1}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　　（10）$\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$；　　（12）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}(n\in\mathbf{Z}^+)$；

（13）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{4x^2-3x-2})$；　　（14）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$.

2. 下列函数是否有水平渐近线？若有水平渐近线，写出其方程.

（1）$y=\dfrac{3x+1}{x}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{x^2+1}$；

（3）$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$；　　（4）$y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

3. 试求常数 a 与 b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{3x^2+4x+1}-ax-b)=0$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 存在且为 l，求 a 与 l 的值.

*5. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=A$.

第四节　极限性质

［课前导读］

这一节介绍数列及函数极限性质，读者可以深入理解和熟悉极限的定义，同时为引入新的极限计算方式打下基础. 本节可作为对极限要求较高的专业的选学内容.

*一、利用极限定义证明

例 1　已知 $x_n=\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为 1.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-1|=\left|1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-1|<\varepsilon$，故数列 $\{x_n\}$ 的极限为 1.

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+2}=2$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-A|=\left|\frac{2x^2}{x^2+2}-2\right|=\frac{4}{x^2+2}<\frac{4}{|x|}<\varepsilon(|x|>1),$$

即

$$|x|>\frac{4}{\varepsilon},$$

取 $X=\max\left\{1,\ \frac{4}{\varepsilon}\right\}$，则当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|=\left|\frac{2x^2}{x^2+2}-2\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+2}=2.$

例 3　证明 $\lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3.$

证明　$\forall\,\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-A|=|4x-1-3|=4|x-1|<\varepsilon,$$

只要 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|=|4x-1-3|<\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{x\to1}(4x-1)=3.$$

二、数列极限的性质

定理 1(极限的唯一性)　数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

***证明(反证法)**　假设同时有 $x_n\to a(n\to\infty)$ 及 $x_n\to b(n\to\infty)$，不妨设 $a<b$，取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}>0.$

由 $x_n\to a$ 可知，$\exists\,N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon=\frac{b-a}{2}\left(x_n<\frac{a+b}{2}\right).$

由 $x_n\to b$ 可知，$\exists\,N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，恒有 $|x_n-b|<\varepsilon=\frac{b-a}{2}\left(x_n>\frac{a+b}{2}\right).$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，$x_n<\frac{a+b}{2}$，$x_n>\frac{a+b}{2}$ 同时成立，矛盾. 因此，数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

数列 $\{x_n\}$ **有界**是指存在 $M>0$，使一切 x_n 满足 $|x_n|\leqslant M.$

定理 2(收敛数列的有界性)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则该数列一定有界.

***证明**　不妨设 $x_n\to a(n\to\infty)$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=1$，则对任何 $n>N$，有 $|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$. 因此，取 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|a|\}$，则对一切 n，均有 $|x_n|\leqslant M$，即数列 $\{x_n\}$ 有界.

如果数列无界，则其一定发散；如果数列有界，则其未必收敛. 例如，数列 $\{(-1)^n\}$ 有界($|x_n|=1$)，但发散.

定理 3(收敛级数的保号性)　如果 $x_n\to a(n\to\infty)$ 且 $a>0$(或 $a<0$)，则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，均有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

证明　设 $a>0$，由 $x_n \to a(n\to\infty)$，对 $\varepsilon=\frac{a}{2}$，

$$\exists N>0，当 n>N 时，恒有 |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0.$$

同理可证 $a<0$ 的情景.

推论　如果 $\{x_n\}$ 满足：$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，$x_n\geqslant 0$（或 $x_n\leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$）.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，由此得到的一个新数列称为 $\{x_n\}$ 的**子数列（子列）**，记作 $\{x_{n_k}\}$（$n_k\geqslant k$）.

* **定理 4**　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的子数列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a.

证明　由于数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则

$$\forall \varepsilon>0，\exists N>0，当 n>N 时，恒有 |x_n-a|<\varepsilon.$$

取 $K=N$，则当 $k>K$ 时，$n_k>n_K=n_N>N$，有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon,$$

故子数列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a.

由定理 4 可以得到，若数列 $\{x_n\}$ 的某个子列发散或某两个子列收敛于两个不同的数值，则数列 $\{x_n\}$ 必发散.

例如，$\{(-1)^n\}$ 的奇数子列 $\{(-1)^{2n+1}\}=\{-1\}$ 收敛于 -1，偶数子列 $\{(-1)^{2n}\}=\{1\}$ 收敛于 1，可知数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

可以证明：若数列 $\{x_n\}$ 的奇数子列 $\{x_{2n+1}\}$ 和偶数子列 $\{x_{2n}\}$ 均收敛于 a，则数列 $\{x_n\}$ 收敛且极限为 a；反之亦然.

三、函数极限的性质

我们仅就 $x\to x_0$ 的情况给出性质.

定理 5（函数极限的唯一性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么该极限唯一.

证明过程与数列极限的唯一性的证明相似，略.

定理 6（函数极限的局部有界性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

* **证明**　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则

$$\forall \varepsilon>0，\exists \delta>0，当 0<|x-x_0|<\delta 时，恒有 |f(x)-A|<\varepsilon.$$

取 $\varepsilon=1$，则

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|,$$

记 $M=1+|A|$，则 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 7(函数极限的局部保号性)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，那么存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

证明　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$A>0$，取

$$\varepsilon=\frac{A}{2},\text{则}\ \exists\,\delta>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时，恒有}\ |f(x)-A|<\frac{A}{2}.$$

则

$$f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

同理可证$A<0$的情形.

从定理 7 的证明中可知，在其条件下，还可有更强的结论：

推论 1　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A\neq 0)$，那么存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}.$$

同时有下述结论.

推论 2　如果函数$f(x)$满足：存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么必有$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

证明(反证法)　略.

***定理 8(函数极限与数列极限的关系)**　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为$f(x)$的定义域内的任一收敛于$x_0$的数列，且$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N})$，则$\{f(x_n)\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

证明　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时，恒有}\ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则

$$\text{对上述}\ \delta>0,\ \exists\,N>0,\ \text{当}\ n>N\ \text{时，恒有}\ |x_n-x_0|<\delta.$$

故$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，当$n>N$时，恒有$|x_n-x_0|<\delta$，且$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N})$，即$0<|x_n-x_0|<\delta$，从而有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon.$$

进而得到

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

注　根据本定理，可知取一数列$x_n\to x_0(n\to\infty)$，若$f(x_n)$的极限不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，或取两数列$x_n'\to x_0(n\to\infty)$，$x_n''\to x_0(n\to\infty)$，若$f(x_n')$与$f(x_n'')$的极限不相同，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

例 4　证明函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$当$x\to 0$时极限不存在(见图 1-44).

证明　取$x_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=1$；

取 $x_n''=\frac{1}{2n\pi}\to 0\ (n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=0.$

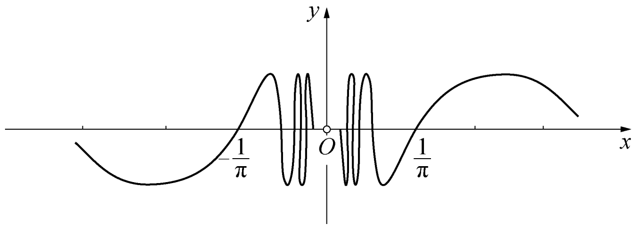


图 1-44

因此，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时极限不存在.

*四、极限运算法则的证明

定理 9(数列极限的运算法则)　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$；(加减法则)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$；(乘法法则)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\sqrt{a}\ (x_n\geqslant 0,\ a\geqslant 0)$；(交换法则)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}\ (\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0)$.(除法法则)

证明　我们仅证明(1)；其余的法则请感兴趣的读者自行证明.

$\forall\varepsilon>0$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，取 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists N_1\in\mathbf{Z}^+$，当 $n>N_1$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2};$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，取 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists N_2\in\mathbf{Z}^+$，当 $n>N_2$ 时，恒有

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，于是，当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{和}\ |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立. 于是，当 $n>N$ 时，

$|(x_n\pm y_n)-(a\pm b)|=|(x_n-a)\pm(y_n-b)|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$ 因此有(1)式成立.

定理 10(函数极限的四则运算法则)　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}(B\neq 0)$.

我们仅证明(2).

证明 对$\forall\varepsilon>0$,

由$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$可知,$\exists M>0$,$\exists\delta_1>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,必有

$$|g(x)|\leqslant M.$$

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$,则取$\dfrac{\varepsilon}{2M}>0$,$\exists\delta_2>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,恒有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

又已知$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则对$\dfrac{\varepsilon}{2|A|}>0$,$\exists\delta_3>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_3$时,恒有

$$|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2|A|}.$$

因此,$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$\begin{aligned}|f(x)\cdot g(x)-A\cdot B|&\leqslant|f(x)g(x)-Ag(x)+Ag(x)-AB|\\&\leqslant|f(x)-A||g(x)|+|A||g(x)-B|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+|A|\cdot\frac{\varepsilon}{2|A|}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_4>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_4$时,恒有$|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

$$|f(x)\cdot g(x)-0|\leqslant|f(x)|\cdot|g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon.$$

这就证明了(2).

定理 11(复合函数的极限运算法则) 设函数$y=f[g(x)]$是由函数$u=g(x)$与$y=f(u)$复合而成的,$f[g(x)]$在点x_0的去心邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且存在$\delta_0>0$,当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时,有$g(x)\neq u_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证明 对于$\forall\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,故$\exists\eta>0$,当$0<|u-u_0|<\eta$时,恒有

$$|f(u)-A|<\varepsilon.$$

又$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,则对上述$\eta>0$,$\exists\delta_1>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,恒有

$$|g(x)-u_0|<\eta.$$

因此，取 $\delta=\min\{\delta_0, \delta_1\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|u-u_0|=|g(x)-u_0|<\eta$ 及 $|g(x)-u_0|\neq 0$ 同时成立，从而

$$|f[g(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon.$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

习题 1-4

1. 已知 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限为 0.

2. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

3. 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

4. 用数列极限定义证明：

（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$；

（2）如果 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

5. 证明函数极限的唯一性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，那么该极限唯一.

6. 证明函数极限的唯一性：如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，那么该极限唯一.

7. 证明函数的局部有界性：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，那么存在常数 $M>0$ 和 $X>0$，使得 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

8. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}\left(\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0\right)$.

9. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，证明：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}(B\neq 0)$.

第五节　两个重要极限

［课前导读］

这一节介绍两个重要极限的计算方法. 在正式介绍极限之前，我们需要回忆一下三角

函数的相关公式及二项式定理.

倍角公式：$\sin 2x=2\sin x\cos x$,

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1.$$

半角公式：$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$,

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-1.$$

和差化积公式：$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

二项式定理：

$$\begin{aligned}(a+b)^n&=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^na^0b^n\\&=a^nb^0+\frac{n}{1!}a^{n-1}b^1+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k\\&\quad+\cdots+a^0b^n.\end{aligned}$$

在介绍两个重要极限之前，需要先介绍两个推导重要极限的夹逼准则和单调有界收敛准则.

一、夹逼准则

准则 1　如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足

（1）$\exists N_0\in\mathbf{N}$，当 $n>N_0$ 时，$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

***证明**　$\forall\varepsilon>0$，

由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ 可知，$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，恒有$|y_n-a|<\varepsilon$，即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon.$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，$\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，恒有$|z_n-a|<\varepsilon$，即

$$a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon.$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$a-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<a+\varepsilon,$$

即$|x_n-a|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

利用数列收敛的夹逼准则，可以计算某些数列的极限.

例 1　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.

解　设 $x_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}$，则可知 x_n 为 $n+1$ 项之和. 我们需要先对数列 $\{x_n\}$ 的通项进行适当的“放缩”.

$$\overbrace{\frac{1}{(n+n)^2}+\frac{1}{(n+n)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}}^{n+1}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}<\overbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}^{n+1},$$

即有

$$\frac{n+1}{4n^2}=\frac{n+1}{(n+n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}<\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4n^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=0$，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]=0.$$

准则 1 可以推广到函数的极限.

准则 1′　如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 满足：

（1）当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$（或 $|x|>X$）时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，（见图 1-45）

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

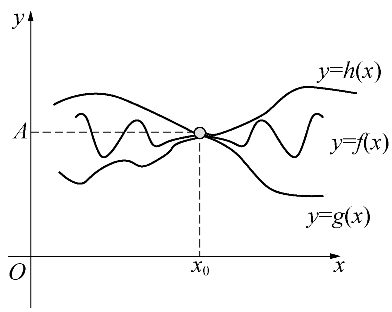


图 1-45

准则 1′的证明留作习题.

例 2　已知 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

解　由于 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$，且

$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}[-|f(x)|]=-\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$，

由准则 1′可得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解　当 $x\neq0$ 时，$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$.

因此，当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant1$，由夹逼定理可得 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

当 $x<0$ 时，有 $1-x>x\left[\dfrac{1}{x}\right]\geqslant1$，由夹逼定理可得 $\lim\limits_{x\to0^-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$，

从而

$$\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

二、第一重要极限

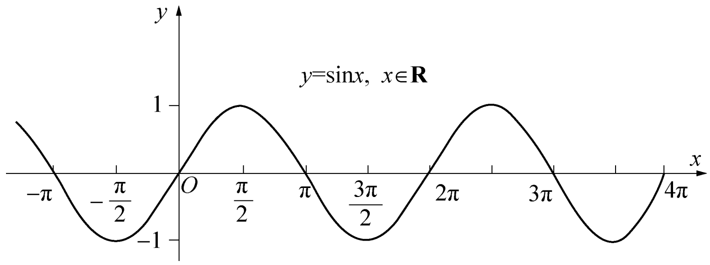


图 1-46

观察正弦函数的图像(见图 1-46),可知当 $x\to 0$ 时,$\sin x\to 0$,那么这两个函数的比值 $\frac{\sin x}{x}$ 的极限是否存在?结果如何?下面就用函数的夹逼准则来证明一个重要的结论:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

证明　$x\neq 0$ 时,函数 $\frac{\sin x}{x}$ 均有定义.

首先,建立一单位圆(见图 1-47),

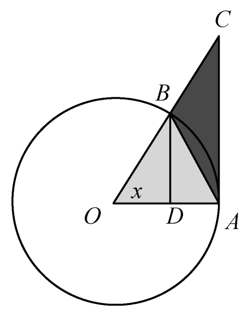


图 1-47

设圆心角 $\angle AOB=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

这样,$\sin x=DB$,$x=\overset{\frown}{AB}$,$\tan x=AC$.

由 $S_{\triangle AOB}<S_{\text{扇形}AOB}<S_{\triangle AOC}$,得 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$.

等式两端除以 $\frac{1}{2}\sin x$,得 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$.

因此,$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

上式若用“$-x$”代替“x”,则上式形式不变,表明 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时,上式仍成立.

因为 $0<|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$,由函数夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

且当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时,$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$,由夹逼定理可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

注　由以上证明过程可推得结论 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$,类似地还可以得到 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

我们由第一重要极限很容易得到下列结果(可以作为公式使用).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1$;

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\tan x}{x}}=1$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$（令 $u=\arcsin x$，则 $x=\sin u$）；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\tan u}=1$（令 $u=\arctan x$，则 $x=\tan u$）.

例 4　计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解　（1）令 $t=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，因此

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1;$$

（2）$\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$可以先变形为$\dfrac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}(x+3)$，再由 $x\to 3$ 时$(x^2-9)\to 0$，可得

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}\lim_{x\to 3}(x+3)=1\cdot 6=6;$$

（3）利用二倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}\\&=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\\&=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1;\end{aligned}$$

（4）利用和差化积公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos a.\end{aligned}$$

注　最后一个等号应用了结论 $\lim\limits_{u\to u_0}\cos u=\cos u_0$.

三、单调有界收敛准则

如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是单调增加的；

如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是单调减少的.

单调增加或单调减少的数列简称单调数列.

在讨论数列极限的性质时曾指出，收敛数列必有界，但有界数列未必收敛，有界是数列收敛的必要条件，但如果是单调有界数列呢？这就得到了单调有界收敛准则.

准则 2　单调有界数列必有极限.

如果详细地说，则有下列性质.

（1）如果数列$\{x_n\}$单调增加且有上界，即存在数 M，使得

$$x_n\leqslant M\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 必存在(且极限$\leqslant M$).

（2）如果数列$\{x_n\}$单调减少且有下界，即存在数 m，使得

$$x_n\geqslant m\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 必存在(且极限$\geqslant m$).

对准则 2 我们不予证明，仅给出其几何解释.

在数轴上看(见图 1-48)，由于数列$\{x_n\}$为单调的，故对应数列的点 x_n 只可能向一个方向移动(单调增加数列只向右方移动，单调减少数列只向左方移动)，所以只有两种可能：点 x_n 或移向无穷远处，或趋于某个确定的值. 但又由于数列有界，因此数列不能趋于无穷，这样，只能使数列$\{x_n\}$趋于某个确定的值，也就是数列的极限.

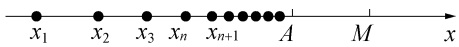


图 1-48

例 5　设 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$（$n$ 重根式），证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求出极限.

证明　由 x_n 的表达式可知 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，且 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}>\sqrt{3+x_{n-1}}=x_n$，因此可知$\{x_n\}$是单调递增的.

因为 $x_1=\sqrt{3}<3$，假定 $x_k<3$，则 $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$，所以$\{x_n\}$是有界的. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

由递推关系 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，得 $x_{n+1}^2=3+x_n$. 等式两边取极限，故

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim_{n\to\infty}(3+x_n),$$

即 $A^2=3+A$，

解得

$$A=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\text{或}A=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\text{（舍去）}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

四、第二重要极限

现在我们利用单调有界收敛准则来讨论另一个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

先考虑 $x>0$ 且 $x=n$ 时的情形.

设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，利用二项式定理，则有

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\\\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比较 x_n 与 x_{n+1}，则有 $x_n\leqslant x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调增加.

又由

$$x_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

得

$$x_n\leqslant1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即 $\{x_n\}$ 有上界，因此由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，不妨记

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \cdots.$$

设 x 为实数，当 $x>0$ 时，则有 $n=[x]\leqslant x<[x]+1=n+1$，因此

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\mathrm{e},$$

并注意到 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$，则由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$

当 $x<0$ 时，令 $x=-(t+1)$，则当 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$，因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-1}\right]^{t+1}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，则得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

我们还可以得到第二重要极限的另一种形式.

利用代换 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to0$，于是有

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

习惯上写作

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

注　在求函数极限时，常用到形如 $[f(x)]^{g(x)}$ $(f(x)>0,\ f(x)\neq1)$ 的函数(通常称为幂指函数)的极限，我们有下面的计算公式.

性质　如果 $\lim f(x)=A>0$，$\lim g(x)=B$，那么

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=A^B.$$

例 6　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{x+1}$.

解　（1）利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 求极限，要注意函数指数中变量 x 与底数中变量 x 是相同的，正负号也相同，且自变量 $x\to\infty$.

本题 $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^x$，底数中变量为 $-x$，指数中变量是 x，两者相差一个负号，求解时，可按下述两种方法之一计算.

（Ⅰ）做变换：令 $x=-t$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{\mathrm{e}};$$

（Ⅱ）适当变形：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{(-x)(-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=\mathrm{e}^2$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n\cdot\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^2=\mathrm{e}^3\cdot 1^2=\mathrm{e}^3.$$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}$.

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{5}}\right]^{\frac{5}{3x-1}\cdot(x+1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(x+1)}{3x-1}}=\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}$.

习题 1-5

1. 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot 2x$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　　（6）$\lim\limits_{n\to\infty}5^n\sin\dfrac{x}{5^n}$；

（7）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3x}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;　　(12) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

2. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x+1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^x$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}$;　　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3^n}\right)^{3^n}$;

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x-1}$;　　(12) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;　　(14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

3. 利用夹逼准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

*4. 如果函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 满足:

(1) 当 $x\in\mathring{U}(x_0, r)$ (或 $|x|>X_0$) 时, $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$, 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

第六节　无穷小与无穷大

[课前导读]

如果 $\lim f(x)=A$, 那么 $\lim[f(x)-A]=0$, 即任何一个极限存在的函数都可以转化为极限为零的函数. 这一类极限为零的函数具有非常重要的性质, 所以我们需要把它们单独拿出来进行讨论.

一、无穷小

在讨论数列和函数的极限时，经常遇到以零为极限的变量. 例如，变量$\frac{1}{n}$，当 $n\to\infty$ 时，其极限为 0；函数$\frac{1}{x^2}$，当 $x\to\infty$ 时，其极限为 0；函数 $x-1$，当 $x\to 1$ 时，其极限为 0……这些在自变量某一变化过程中以零为极限的变量统称为无穷小量(简称为无穷小).

我们以 $x\to x_0$ 为例，来定义函数 $f(x)$ 无穷小的概念.

定义 1　设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的**无穷小**.

此定义也可用"ε-δ"语言描述：

如果

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ 当\ 0<|x-x_0|<\delta\ 时，恒有\ |f(x)|<\varepsilon,$$

那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

例如，由$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$，知 $f(x)=x^2-1$ 为 $x\to 1$ 时的无穷小；

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，知 $f(x)=\frac{1}{x}$为 $x\to\infty$ 时的无穷小；

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$，知 $x_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

注　(1) 无穷小与一个很小的确定的常数(如$\frac{1}{10^8}$)不能混为一谈. 这是因为无穷小是个变量(函数)，自变量在某一变化过程中，其绝对值能小于任意给定的正数 ε. 但是$\frac{1}{10^8}$做不到这一点.

(2) 讨论无穷小的时候，要注意自变量的变化过程. 例如 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时是无穷小，而当 $x\to 1$ 时极限却是一个常数.

(3) 零是无穷小中唯一的常数.

由数列和函数四则运算性质可知，在自变量的同一变化过程中，有限个无穷小的和，差，积都是无穷小，下面我们给出无穷小的另一个重要性质：

定理 1(无穷小运算性质)　在自变量的同一变化过程中，有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解　由于 $x\to\infty$ 时$\frac{1}{x}$的极限为零，故$\frac{1}{x}$是当 $x\to\infty$ 时的无穷小. 而$|\sin x|\leqslant 1$ 是有界函数，因此由无穷小运算性质可知，$\frac{\sin x}{x}$是当 $x\to\infty$ 时的无穷小(见图 1-49)，即

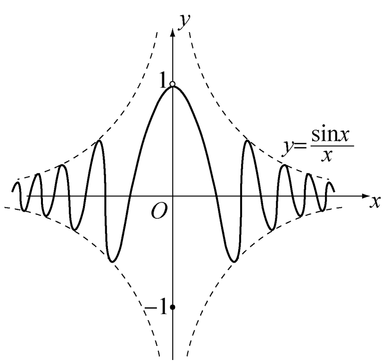


图 1-49

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

二、无穷大

我们仅就 $x\to x_0$ 的情形来定义无穷大.

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，对应的函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，就说 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

精确地说，有下述定义.

定义 2　如果

$$\forall M>0，\exists\delta>0，当 0<|x-x_0|<\delta 时，恒有 |f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，简称无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

若将上述"$|f(x)|>M$"改成 $f(x)>M$ 或 $f(x)<-M$，则有

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的正无穷大；

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$，称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的负无穷大.

无穷大定义的
几何解释

注　这里 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 只是借用了极限的符号，并不意味着函数 $f(x)$ 存在极限，因为无穷大 ∞ 不是数，不可与绝对值很大的常数混淆，无穷大是绝对值无限增大的变量.

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

证明　$\forall M>0$，要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，即 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$，取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

直线 $x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 图形的铅直渐近线(见图 1-50).

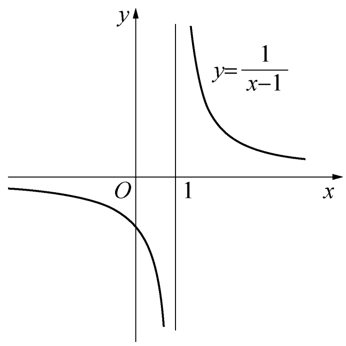


图 1-50

注　若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 称为函数 $y=f(x)$ 图形的**铅直渐近线**.

例 3　求曲线 $y=\dfrac{4x-1}{(x-1)^2}$ 的渐近线方程.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{(x-1)^2}=\infty$，所以 $x=1$ 是曲线的铅直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{(x-1)^2}=0$，所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线.

* **注**　若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-ax]=b$，则直线 $y=ax+b$ 是函数 $y=f(x)$ 图形的斜渐近线.

三、无穷小与无穷大的关系

无穷小和无穷大之间存在密切的关系.

定理 2　在自变量的同一变化过程中,

(1) 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;

(2) 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证明　我们仅就 $x\to x_0$ 的情形进行证明, 其他情形类似.

$\forall \varepsilon>0$, 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 取 $M=\frac{1}{\varepsilon}>0$, 则 $\exists \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)|>M$, 即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\frac{1}{M}=\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0;$$

反之, $\forall M>0$, 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $f(x)\neq 0$, 则取 $\varepsilon=\frac{1}{M}$, 那么 $\exists \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)|<\varepsilon$,

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}=M,$$

故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+5}{3x^2-2x-1}$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{2x+5}=\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1-1}{2\cdot 1+5}=0.$

由无穷小与无穷大的关系, 有

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{3x^2-2x-1}=\infty.$$

四、无穷小的比较

由无穷小的运算可知, 两个无穷小的和、差是无穷小, 两个无穷小的乘积是无穷小. 那么两个无穷小的商又会出现什么情形呢?

比如, 当 $x\to 0$ 时, x, $2x$, $\sin x$, x^2, $x\sin\frac{1}{x}$ 均为无穷小, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=0$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x^2}=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在. 由此可见，在自变量的同一变化过程中，两个无穷小的商的极限可能为零，可能是非零常数，也可能不存在.

一般情况下，两个无穷小的商的极限由于不遵循极限的运算法则，且不能立刻判断其极限是否存在，因此，这类极限通常称为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限. 未定式极限各不相同，反映了作为分子、分母的两个无穷小趋于零的"快慢"程度不同. 当 $x\to0$ 时，x^2 趋于零的速度比 x "快"，x 趋于零的速度比 x^2"慢"，而 $\sin x$ 与 x 趋于零的速度"差不多".

如果用精确的数学语言来描述这"快"与"慢"的程度，则有

定义 3　设 α、β 为自变量的同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq0$，则称 β 是 α 的同阶无穷小；

特别当 $C=1$ 时，则称 β 和 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq0(k>0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

由此定义可以得到一些常见的无穷小比较的例子.

例如，由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{3x}=0$ 知，当 $x\to0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小，记作 $x^2=o(3x)(x\to0)$；

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 知，当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，记作 $\sin x\sim x(x\to0)$；

由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ 知，当 $x\to1$ 时，x^2-1 是 $x-1$ 的同阶无穷小；

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\infty$ 知，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}$ 是比 $\dfrac{1}{n^2}$ 低阶的无穷小；

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ 知，当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小，也称 $1-\cos x$ 和 x^2 是同阶无穷小.

例 5　证明：当 $x\to0$ 时，$\sqrt{x+1}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

证明　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\dfrac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2[(1+x)-1]}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}=1.$$

我们还可以得到一个更一般的结论：

$$x\to0\text{ 时，}(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(\alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\neq0).$$

五、等价无穷小的应用

我们先看关于等价无穷小的两个定理.

定理 3　设 α, β 为自变量的同一变化过程中的无穷小，则

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

证明　必要性：设 $\alpha\sim\beta$，则

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=0,$$

因此，$\beta-\alpha=o(\alpha)$，即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

充分性：设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left[1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right]=1,$$

因此，$\alpha\sim\beta$.

因为 $\sin x\sim x(x\to0)$，所以 $\sin x=x+o(x)$.

定理 4　设 α, β，α'，β' 为自变量的同一变化过程中的无穷小，又

$$\alpha\sim\alpha',\ \beta\sim\beta'\text{，且 }\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\text{存在，则 }\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证明　$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}.$

通过以上学习，我们已掌握了以下等价无穷小：

当 $x\to0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x;$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ (1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(\alpha\neq0).$$

除了以上等价无穷小外，我们还可以得到：

当 $x\to0$ 时，

$$x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1,\ a^x-1\sim x\ln a(a>0,\ a\neq1).$$

这几个无穷小的等价证明会用到函数的连续性，我们留待下节再证.

注　在上述等价无穷小中，用无穷小量 $\alpha(x)$ 代替 x 也成立. 例如，当 $x\to0$ 时，$\sin3x\sim3x$.

例 6　利用等价无穷小替换求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan2x}{\tan5x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}$；　　（4）求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\arctan x}$.

解　（1）当 $x\to0$ 时，$\tan2x\sim2x$，$\tan5x\sim5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5};$$

（2）当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2};$$

（3）当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2;$$

（4）当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$\arctan x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}.$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$.

解　$\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=e^a\cdot 1=e^a$，

其中 $e^{x-a}-1\sim x-a\quad(x\to a)$.

例 8　当 $x\to 0$ 时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，求常数 α 的值.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\alpha x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}\alpha=1$，得 $\alpha=-\frac{3}{2}$.

习题 1-6

1. 判断下列各题中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

（1）$3x^2-2x-1(x\to 1)$；　　（2）$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}(x\to+\infty)$；

（3）$\ln x(x\to+\infty)$；　　（4）$e^{\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$；

（5）$x^2(3-\sin\frac{1}{x})(x\to 0)$；　　（6）$e^{\frac{1}{x}}(x\to 0^+)$.

2. 当 $x\to 0(x\to 0^+)$ 时，下列哪些是 x 的高阶无穷小？哪些是 x 的同阶或等价无穷小？哪些是 x 的低阶无穷小？并指出无穷小的阶数.

（1）$e^{\sqrt{x}}-1$；　　（2）$x+2x^2$；　　（3）$1-\cos x^2$；

（4）$x^4+\sin 2x$；　　（5）$\sqrt{x(1-x)}$；　　（6）$\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}(1-x)$；

（7）$\ln(1+x^{\frac{3}{2}})$；　　（8）$\sin(\tan^2 x)$；　　（9）$\csc x-\cot x$.

3. 下列计算是否正确？如有错误，请指出错在何处.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

4. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x+1}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^3-2x+1}}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x^2-9}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^3)}{\sin^2 x}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\ln(1+2x^3)}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{\ln(1-2x)}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$；　　（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$；

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]$；　　（12）$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$；

（13）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos x}$；　　（14）$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$；

（15）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x^2}-1}{x\tan x}$；　　（16）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x\tan x)}{\sin 2x}$.

5. 证明：

（1）有限个无穷小的和与差都是无穷小；

（2）有界函数与无穷小的乘积是无穷小，有限个无穷小的积是无穷小.

*6. 根据定义证明：

（1）当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1+x}{x}$为无穷大；

（2）当 $x\to 0^+$时，$y=x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$为无穷小.

*7. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是否有界？又当 $x\to\infty$ 时，函数是否为无穷大？为什么？

*8. 求曲线$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}(x\neq -1)$的斜渐近线方程.

第七节　函数的连续性及其性质

［课前导读］

对于函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，当 $x\to 1$ 时极限是存在的，但是函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处

是没有定义的，所以在 $x=1$ 处曲线是“断”的(见图 1-51)．而对于函数 $y=x+1$，$\lim\limits_{x\to1}x+1=2$，这时函数的曲线就是“不断”的(见图 1-52)，这样的函数称为“连续”函数.

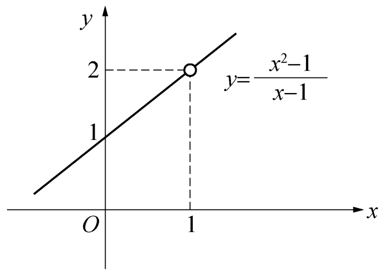


图 1-51

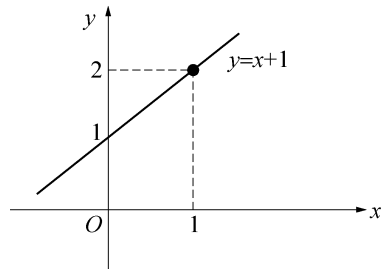


图 1-52

一、连续的概念

“连续性”这个概念在日常生活中处处存在，如气温的变化、地球的转动、动植物的生长等均是连续变化的. 这种现象在函数关系上的反映，就是“函数的连续性”. 例如，就植物的生长来看，当时间变化很微小时，植物也相应发生微小的变化，这种特点就是所谓的连续性.

1. 函数在一点处的连续性

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

或者可以表示为

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

我们也可以用增量来定义连续. 设变量 u 从初值 u_1 变到终值 u_2：$u_1\to u_2$，则 u_2-u_1 就叫作变量 u 的增量，记作 $\Delta u=u_2-u_1$.

注　Δu 可正可负. 当 $\Delta u>0$ 时，$u_2=\Delta u+u_1$，变量 u 是增大的(见图1-53)；当 $\Delta u<0$ 时，$u_2=\Delta u+u_1$，变量 u 是减小的(见图 1-54).

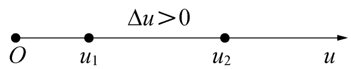


图 1-53

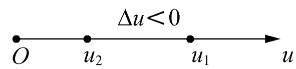


图 1-54

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，相应地，函数 $f(x)$ 也发生变化：$f(x_0)\to f(x_0+\Delta x)$，此时函数 y 的对应增量(见图 1-55)为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

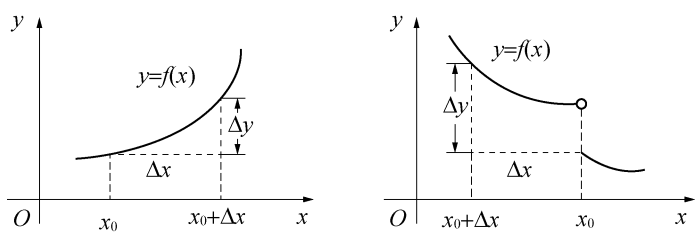


图 1-55

连续定义的几何解释

若 x_0 固定不动，而让 Δx 发生变动，这样 Δy 也将随 Δx 变化而变化. 如果 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

和极限概念中有左、右极限一样，函数也有左、右连续的概念.

若 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续；

若 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续.

显然有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0),$$

即函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处左连续且右连续.

从上述性质可以看出，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，等价于其在 x_0 处的左极限、右极限存在且相等并等于该点的函数值. 其中只要有一条不成立，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

例 1　用连续性定义证明 $y=x^2$ 在 x_0 处连续.

证明　当自变量 x 的增量为 Δx 时，函数 $y=x^2$ 对应的增量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=0$，

因此 $y=x^2$ 在 x_0 处连续.

我们也很容易知道，$y=\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处右连续(请读者自行证明).

2. 区间上的连续函数

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) (或 $(-\infty, +\infty)$) 内处处连续(每一点处均连续)，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) (或 $(-\infty, +\infty)$) 内连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

连续函数 $y=f(x)$ 的图形是一条连续不断的曲线.

由于基本初等函数在其各自定义域内每点处的极限都存在，且等于该点处的函数值，由连续函数的定义可知，基本初等函数都是各自定义域内的连续函数.

设函数 $f(x)=P_n(x)$ 为 n 阶多项式($P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$)，由极限运算法则可知，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，即对，$\forall x_0\in(-\infty, +\infty)$，

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0)=f(x_0).$$

设 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$、$Q(x)$ 为多项式，若 $Q(x_0)\neq 0$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=F(x_0)$，即其在定义域内的每一点处都连续.

例如，设 $y=\sqrt{x}$，由 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\ (x_0>0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$，可知其在 $[0, +\infty)$ 内连续.

为了进一步说明连续性的概念，再举一例.

例 2　证明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明　$\forall x\in(-\infty, +\infty)$，当 x 有增量 Δx 时，对应的函数增量是

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

由于
$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1,$$

因此
$$|\Delta y|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\leqslant 2\cdot\left|\frac{\Delta x}{2}\right|=|\Delta x|,$$

即
$$0\leqslant|\Delta y|\leqslant|\Delta x|.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，由夹逼准则知 $|\Delta y|\to 0$，从而 $\Delta y\to 0$，

故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

同理可证 $y=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

二、函数的间断点

按函数在一点处连续的定义，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，是指 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，即需要 $f(x_0)$ 有定义；而要考虑极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，则需 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义作为前提条件. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有定义，且函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x=x_0$ 处没有定义；

（2）虽然在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在（$f(x_0^+)$，$f(x_0^-)$ 之一不存在，或两者存在但不相等）；

（3）虽在 $x=x_0$ 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断（不连续）. x_0 称为 $f(x)$ 的**间断点**，或不连续点.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义，即知 $x=0$ 是它的间断点（见图 1-56）.

函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0\neq f(0)$，即知 $x=0$ 是它的间断点（见图 1-57）.

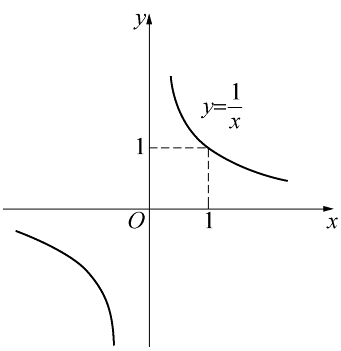


图 1-56

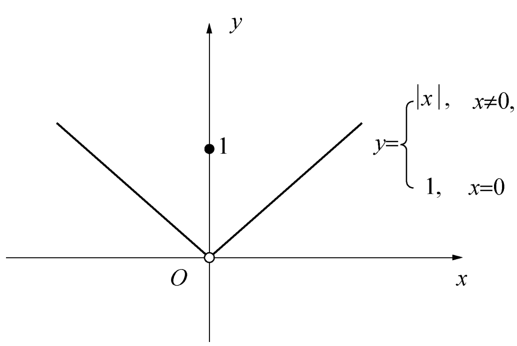


图 1-57

假设 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，按其单侧极限是否存在，分为第一间断点与第二间断点，具体分法如下.

（1）若 $f(x_0^+)$、$f(x_0^-)$ 存在，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

如果 $f(x_0^+)=f(x_0^-)$（$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在），则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点. 这时可能出现的情况为，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处无定义，或有定义但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，故可通过补充或修改该点的函数值，使函数在该点处连续.

例 3　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点（见图 1-58），为可去间断点.

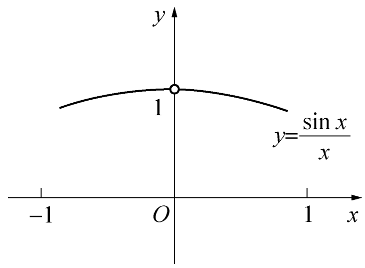


图 1-58

若补充 $f(0)=1$，则 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

如果 $f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 4　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x>3,\\ x-1, & x\leqslant 3\end{cases}$

在 $x=3$ 处有定义，$f(3)=2$，

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6,$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x-1)=2,$$

$$f(3^+)\neq f(3^-),$$

知 $x=3$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点（见图 1-59），为跳跃间断点.

（2）若 $f(x_0^+)$、$f(x_0^-)$ 中至少有一个不存在，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点. 不是第一类间断点的，均是第二类间断点.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点.

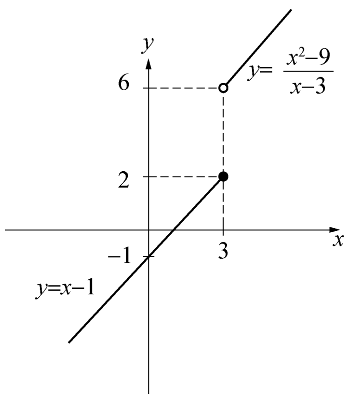


图 1-59

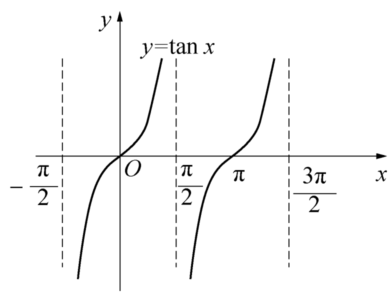


图 1-60

例 5　$f(x)=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义，又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，则 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数的第二类间断点(见图 1-60)，为无穷间断点.

例 6　$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，又当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 之间变动无限多次，故 $x=0$ 为 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点(见图 1-61)，为振荡间断点.

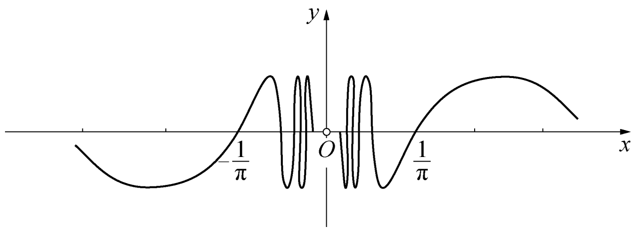


图 1-61

例 7　讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}(x\geqslant 0)$ 的连续性.

解　当 $x\in[0,1)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=0$；

当 $x=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^n}}=1$，即

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,1)$，$(1,+\infty)$ 内连续. $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 8　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的间断点.

解　在 $x=-1$ 处，$f(-1^-)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}|x-1|=2$，

$$f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0,$$

因此 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点；

在 $x=1$ 处，$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$，$f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}|x-1|=0$，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的连续点.

三、初等函数的连续性

由函数在一点处的连续性定义和极限的四则运算法则，可以得到

定理 1（连续函数的四则运算）　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则

（1）和 $f(x)+g(x)$；

（2）差 $f(x)-g(x)$；

（3）积 $f(x)\cdot g(x)$；

（4）商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$

都在点 $x=x_0$ 处连续.

根据定理 1 可知，由于 $\sin x$，$\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 和 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 在其定义域内是连续的，即三角函数在其定义域内是连续的.

定理 2（反函数的连续性）　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),\ x\in I_x\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续.

从几何上看，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-62）. 因此，如果曲线 $y=f(x)$ 为连续曲线，那么曲线 $y=f^{-1}(x)$ 也是连续曲线.

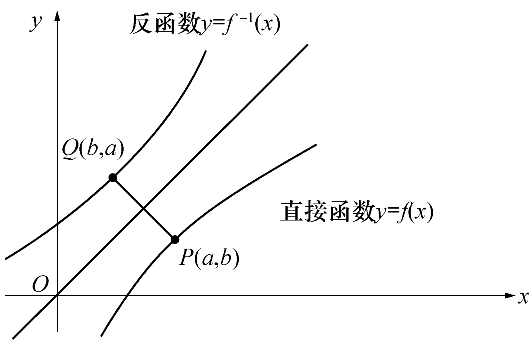


图 1-62

由此可知，由于 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续，故 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上单调增加且连续.

由于 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少且连续，故 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续.

由于 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加且连续，故 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加且连续；同理可得 $y=\operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少且连续.

因此，反三角函数在其定义域内是连续的.

当 $a>0$，$a\neq 1$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}a^x=\lim\limits_{x\to x_0}a^{x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim\limits_{x\to x_0}a^{x-x_0}$，

令 $u=x-x_0$，则当 $x\to x_0$ 时，$u\to 0$，故由极限复合运算法则知

$$\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}\lim_{u\to 0}a^u=a^{x_0},$$

从而 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，因此它的反函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

因此，指数函数与对数函数在其定义域内是连续的.

定理 3(复合函数的连续性)　设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0).\tag{1}$$

定理 3 的结论又可写成：$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$.　　(2)

(2)式表示，在定理 3 的条件下，求复合函数 $y=f[g(x)]$ 的极限时，函数符号 f 与极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 可交换次序.

例如，求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$，$y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$ 可看作 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成. 因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$，而函数 $y=\sqrt{u}$ 在点 $u=\dfrac{1}{6}$ 处连续，因此

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

将定理 3 的条件做些修改，则可得到：

定理 4　设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$，若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续.

例如，对于函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内连续，又 $f(u)=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，因此，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内连续.

再比如，幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随 μ 的值而异，但无论 μ 为何值，在 $(0,+\infty)$ 内，$y=x^\mu$ 均有定义. 由 $y=x^\mu=a^{\mu\log_a x}(a>0,a\neq 1)$，将幂函数 $y=x^\mu$ 看成是指数函数 $y=a^u$ 与对数函数 $u=\mu\log_a x$ 复合而成的. $y=a^u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$u=\mu\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，因此幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内总是连续的.

如果对不同的 μ，分别讨论幂函数 $y=x^\mu$ 的连续性，可以证明幂函数 $y=x^\mu$ 在其定义域内是连续的.

总结本节在前面的各类讨论，可以得到：

幂函数 $y=x^\mu$ 在其定义域内是连续的；指数函数与对数函数在其定义域内是连续的；三角函数及反三角函数在其定义域内是连续的. 因此，基本初等函数在其定义域内是连续的.

根据初等函数的定义及连续函数的和、差、积及商的连续性，以及复合函数的连续性的相关结论，可以得到：一切初等函数在其定义区间内是连续的.

注 1　定义区间是指包含在定义域内的区间.

注 2　分段函数不作为初等函数处理，它在分界点的连续性一般需按定义加以讨论.

注 3　若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 因此，此时若求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，则只需求出函数值 $f(x_0)$ 就可以了.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-0^2}=1$.

对于形如 $u(x)^{v(x)}(u(x)>0,\ u(x)\neq 1)$ 的幂指函数，如果 $\lim u(x)=a>0$，$\lim v(x)=b$，则 $\lim u(x)^{v(x)}=a^b$. 这个结论在前面的章节中已经用到，若细细想一想，这里有连续函数的运算在其中.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1$.

更一般地，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解　令 $a^x-1=y$，则 $x=\log_a(1+y)=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$.

易见当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\ln a.$$

例 11　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\cos\left[\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\cos\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]=\cos 0=1.$$

四、闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数有很多重要的性质，这些性质的几何直观是比较明显的，但某些证明却超出了本书的范围，所以下面以定理的形式把这些性质叙述出来，略去证明.

1. 最大值和最小值定理

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $x_0\in I$，使对任何不等于 x_0 的 $x\in I$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值；若存在 $x_0'\in I$，使对任何不等于 x_0' 的 $x\in I$，有 $f(x)\geqslant f(x_0')$，则称 $f(x_0')$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的最小值.

例如，函数 $f(x)=1+\sin x$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上有 $f_{\max}=2$，$f_{\min}=0$；

函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内有 $f_{\max}=1$，$f_{\min}=-1$；

函数 $f(x)=x$ 在 $(-1,\ 1)$ 内无最大值、最小值，但有界.

那么在什么条件下，函数 $f(x)$ 必有最大值、最小值，或必有界呢？

定理 5(最大值和最小值定理)　若函数 $f(x)$ 在闭区间上连续，则该函数在该闭区间上必有界，且有最大值和最小值.

定理 5 也可叙述为，若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi_1 \in [a, b]$，使 $f(\xi_1) = M = \max\limits_{x\in[a, b]} f(x)$；至少存在一点 $\xi_2 \in [a, b]$，使 $f(\xi_2) = m = \min\limits_{x\in[a, b]} f(x)$（见图 1-63）.

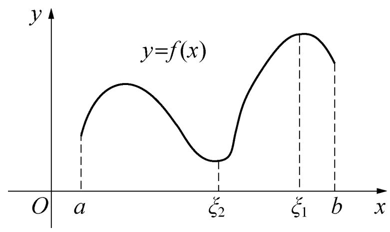


图 1-63

从而有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，则取 $K = \max\{|m|, |M|\}$，使 $|f(x)| \leqslant K$，$x \in [a, b]$，即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

2. 介值定理

方程 $f(x) = 0$ 的根称为函数 $f(x)$ 的**零点**. 是不是所有的函数都有零点呢?

如图 1-64 所示，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒大于零，所以无零点；而在图 1-65 中，虽然 $f(a)>0$，$f(b)<0$，但是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也没有零点. 那么需要什么条件才能使函数必有零点?

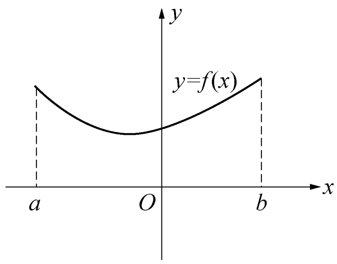


图 1-64

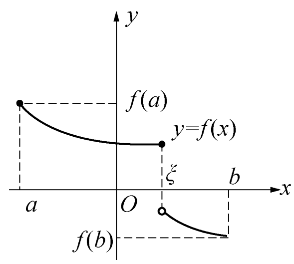


图 1-65

定理 6(零点定理)　若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$.

从几何上看，如果连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这段曲线弧与 x 轴至少有一个交点（见图 1-66）.

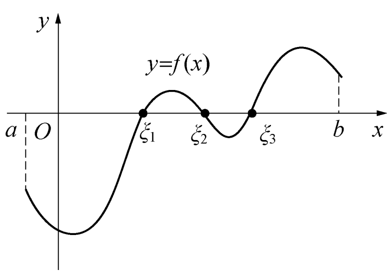


图 1-66

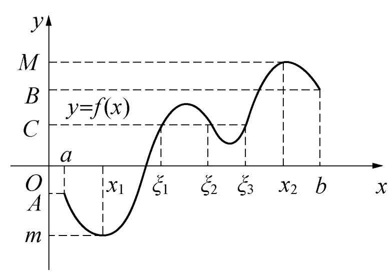


图 1-67

定理 7(介值定理)　若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) = A$，$f(b) = B (A \neq B)$，则对于 A、B 之间的任意一个数 C，在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi) = C$. 进一步，函数必取得介于最小值 m 和最大值 M 之间的任何值（见图 1-67）.

介值定理由零点定理即得，证明留作作业.

例 12　试证方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

证明　设 $f(x)=x\cdot 2^x-1$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$, $f(1)=2-1=1>0$，即 $f(0)\cdot f(1)<0$. 由零点定理，知至少存在一点 $\xi\in(0, 1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

例 13　估计方程 $x^3-6x+2=0$ 的根的位置.

解　令 $f(x)=x^3-6x+2$,

$$f(-3)=-7<0,\ f(-2)=6>0,\ f(-1)=7>0,\ f(0)=2>0,\ f(1)=-3<0,$$
$$f(2)=-2<0,\ f(3)=11>0.$$

由于三次方程至多有三个实根，因此方程 $x^3-6x+2=0$ 在 $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ 内各有一实根.

例 14　如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)<a$, $f(b)>b$，证明在 (a, b) 内至少有一点 c，使 $f(c)=c$.

证明　令 $g(x)=f(x)-x$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $g(a)=f(a)-a<0$, $g(b)=f(b)-b>0$. 由零点定理，知至少存在一点 $c\in(a, b)$，使 $g(c)=0$，即 $f(c)=c$.

习题 1-7

1. 选择题：

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)(x+5)}$ 在区间(　　)上连续；

A. $(-4, 3)$　　B. $(-4, -1)$　　C. $(-8, -4)$　　D. $(1, 4)$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} x^k\arctan\dfrac{2}{x^2}=2$，则 $k=$ (　　)；

A. 2　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+n}+n}{n+2}=$ (　　)；

A. ∞　　B. 0　　C. 2　　D. 3

(4) 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x+3)}$ 的间断点的个数为 (　　)；

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(5) 函数 $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处间断是因为(　　)；

A. $f(x)$ 在点 $x=0$ 无定义　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 都不存在

C. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在　　D. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$

(6) 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{kx}, & x>0,\\ 1-x, & x\leqslant 0\end{cases}$在点 $x=0$ 处连续，则 $k=$ (　　).

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1, x>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{x}{|x|}, & 1<|x|\leqslant 3;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

3. 下列函数在指出的点处是否间断？如果间断，说明这些间断点属于哪一类型. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义，使其连续.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x=1$, $x=2$;　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$;　　(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $x=0$;

(5) $f(x)=\sin x\cos\dfrac{1}{x}$, $x=0$;

(6) $f(x)=\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$, k, $m\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$, $x=0$, $x=1$.

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

应选择什么样的常数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数？

5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0,\\ a, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0\end{cases}$$

应选择什么样的常数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数？

6. 设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x<0\ (a>0).\end{cases}$$

(1) a 取什么值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点？

(2) $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的连续区间.

7. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{x|x-2|}{(x^2-4)\sin x}$ 的间断点，并判断其类型.

9. 讨论下列函数的连续性，若有间断点，判断其所属类型.

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$；　　(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

10. 证明：方程 $x^5-3x-1=0$ 至少有一个实根介于 1 与 2 之间.

11. 证明：方程 $x-a\sin x-b=0$（其中 $a>0$，$b>0$）至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明至少存在一点 $\xi\in[0, a]$，使 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

* 13. 设 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，并且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，证明在 (a, b) 内有零点.

本章小结

本章小结

函数概念 与性质	了解 函数的定义域和表达式(集合的交、并、补) 熟悉 几类常见函数性质和图形(基本初等函数、复合函数、分段函数、初等函数)
极限	掌握 数列的极限与计算 了解 函数极限存在性与左右极限之间的关系 熟练 有理函数无理函数极限的计算 了解 夹逼定理和单调有界定理 熟练 三角函数极限和幂指函数极限的计算 了解 无穷小阶的概念，会用等价无穷小性质求极限
连续	了解 函数连续(左、右连续)与间断，会判定间断点类型 理解 并会应用闭区间上连续函数的性质(最值、有界、介值)

章节测试一

一、填空选择题

1. 描述极限$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ 的定义：$\forall$__________，$\exists$__________，当__________，有__________.

2. 极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan2x}{x}=$__________.

3. 极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x^k}=a\neq0$，则 $k=$________，$a=$________.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)=$________.

5. 在$(-\infty,+\infty)$内连续、有界且有零点，但没有最大值及最小值的函数是(　　).

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $\arctan x$　　D. $\dfrac{2x}{1+x^2}$

6. 当 $x\to0$ 时，$f(x)=2^x+5^x-2$ 是 x 的(　　)无穷小.

A. 同阶但非等价　　B. 等价　　C. 高阶　　D. 低阶

7. 下列函数中，在$(-\infty,+\infty)$内连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$

8. 设函数$f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{a-e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 a，b 满足(　　).

A. $a>0$，$b<0$　　B. $a>0$，$b>0$　　C. $a\leqslant0$，$b>0$　　D. $a\leqslant0$，$b<0$

二、计算下列极限.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+2)-\ln n]$；

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+2}\sin\dfrac{2}{x}$；

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$；

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1+3x}}{x^2+\sin2x}$；

6. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

三、设$f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{2x}}+a, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}+e^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，求$a$，$b$的值.

四、画出函数$y=\lim\limits_{n\to\infty}x^2\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$的草图.

五、求函数$f(x)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{x-1}}}$，$x\in(0,+\infty)$的间断点及间断点处的左、右极限，并指出它们是第几类间断点.

六、求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x}{2+x}\right)^{\frac{x}{1-x}}$.

七、设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，$c_i(i=1,2,3,\cdots,n)$为任意正数，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=\dfrac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$.

拓展阅读

天文学家与数学

在中国古代灿烂的文明中，天文历法有着相当重要的地位.《尚书·尧典》中曾记载：尧曾组织了一批天文官员到东南西北四个地方去观测天象，以编制历法，预报季节.

下面介绍几位中国古代天文学家在天文研究中应用数学的故事.

东汉天文学家张衡(78—139，图1)从小在数学、地理、文学等诸方面，就表现出了非凡的才能和广博的学识. 他在担任太史令时主持观测天象、编订历法、候望气象、调理钟律(计量和音律)等事务. 张衡在天文学方面有两项重要贡献，即发表著作《灵宪》和制作浑天仪.《灵宪》中记载了日、月角直径为整个天周的“七百三十六分之一，地广二百四十二分之一”。“七百三十六分之一”，换作现代通用角度单位即为 29′21″，如此得到日、月的角直径当为 29′35. 3″. 这和近代天文测量所得的结果误差只有 2′左右.

南北朝数学家、天文学家祖冲之(429—500，图2)经过多年的观测和推算，发现过去使用的《元嘉历》存在很大误差. 于是祖冲之着手制定新的历法，在公元 462 年编制成了《大明历》，并于公元 510 年开始正式颁布施行.

唐朝天文学家张遂(僧一行，673—727，图3)青年时代到长安，研究天文和数学，成为著名学者. 为修订历法，测量日、月、星辰在其轨道上的位置并掌握其运动规律，他改进了张衡的“浑天仪”，制造出“浑天铜仪”. 他使用“浑天铜仪”和“黄道游仪”观测天象时，可以直接测量出日、月、星辰在轨道上的坐标位置. 他推断出天体上的恒星是移动的，这比英国天文学家哈雷(1656—1742)早了一千多年. 张遂修订的《大衍历》是一部具有创新精神的历法，他采用不等间距二次内插法推算出每两个节气之间，黄经差相同，而时间距却不同. 这种算法基本符合天文实际，这在天文学上是一个巨大的进步.



图 1


图 2



图 3



图 4

元朝天文学家、数学家郭守敬(1231—1316，图4)在授时历中对天文数据进行重新测定. 他改革的天文计算方法可以归纳为两点：一是全面用内插法三次差计算，即所谓“垛叠招差”；二是引进了球面直角三角形法，即所谓“立浑比量”.

第二章　一元函数微分学及其应用

第一节　导数的概念及基本求导公式

[课前导读]

我们首先来看几个函数的图像.

大家会发现，在 $x=x_0$ 处它们都是连续的，但是前两个函数的图像和后一个函数的图像相比，$x=x_0$ 处有“角点”或“尖点”出现(见图 2-1、图 2-2)，破坏了图形的美感和润滑度，而第三个函数相对来说 $x=x_0$ 处比较“光滑”(见图 2-3)．那么究竟是什么原因会使图形有这样的差别呢？这就是这一章要研究的内容. 前面两个函数在 $x=x_0$ 处“导数”不存在，即不可导，而第三个函数在 $x=x_0$ 处是“可导”的.

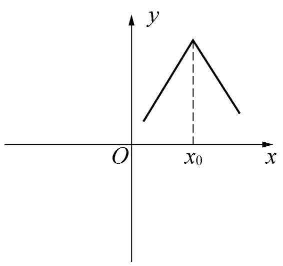


图 2-1

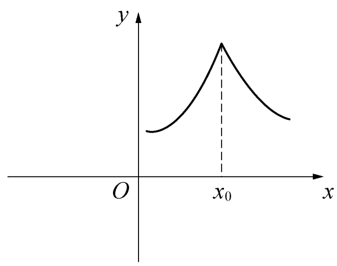


图 2-2

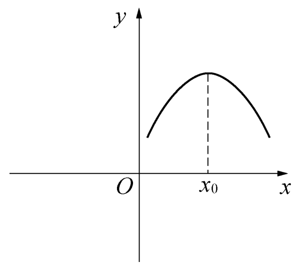


图 2-3

一、割线与切线

在中学数学中，圆的切线可以定义为“与圆只有一个交点的直线”(见图 2-4). 但对于一般曲线，这样定义是不合适的. 例如，直线 $x=1$ 与抛物线 $y=x^2$ 只有一个交点(见图 2-5)，但显然不是实际意义下的切线. 下面我们用极限的思想给出一般曲线的切线的定义.

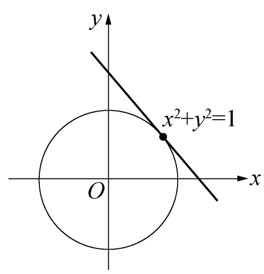


图 2-4

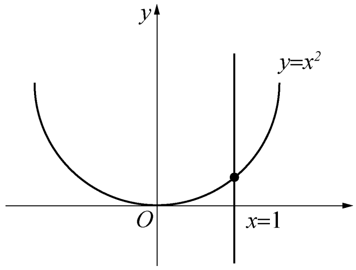


图 2-5

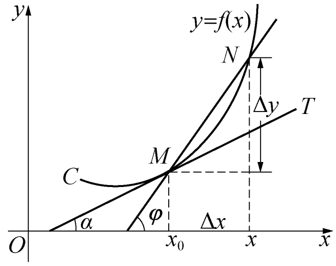


图 2-6

导数的几何意义

设曲线 C：$y=f(x)$，$x\in I$，在曲线 C 上取点 $M(x_0, y_0)$ 及点 $N(x, y)$，连接 MN，则 MN 为过点 M 的割线，割线的倾角为 φ（见图 2-6）. 则割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

当 $N\to M$，即 $x\to x_0$ 时，如果割线趋于一极限位置，我们就把此极限位置上的直线 MT 称为曲线在 M 点处的切线. 此刻切线的斜率即为

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

从上面的例子可以看出，在求切线斜率的过程中，需要用到极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

在自然科学和工程技术领域中，甚至在经济领域和社会科学的研究中，还有许多实际问题会用到如上极限的形式. 正是由于这些问题求解的需要，促使人们研究此极限，从而导致微分学的诞生. 我们抛开这些量的具体意义，抓住它们数量关系上的共性，得出函数导数的概念.

二、导数的定义

定义　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，当 x 在 x_0 处增量为 Δx（$x_0+\Delta x$ 在该邻域内）时，相应地，函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称该极限为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记为

$$f'(x_0),\ y'\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}\text{或}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}.$$

这时也称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导. 如果该极限不存在，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导. 特别地，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ 时，也称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大.

例如，对于函数 $y=x^2$，在点 $x=0$ 处（见图 2-7），

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0\text{，极限存在.}$$

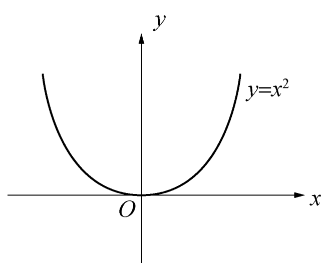


图 2-7

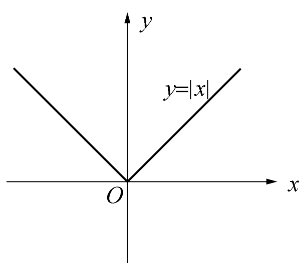


图 2-8

而对于函数 $y=|x|$，在点 $x=0$ 处（见图 2-8），

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$，极限不存在.

由此可知，函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，而 $y=x^2$ 在 $x=0$ 处导数为零，即 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$.

导数是一种特殊的极限，是概括了各种各样的变化率概念而得出的一个更一般性、也更抽象的概念. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率，而导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 则反映函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率，它实际反映函数随自变量变化而变化的“快慢程度”.

如果 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内的每一点处均可导，则称 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内可导. 这时 (a, b) 内的每一点都对应一个导数值，由函数的定义就可以得到一个新函数，则称这个函数为原来函数的导函数，简称为导数，记作 $f'(x)$，y'，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，即有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，就是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值

$$f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}.$$

例 1　求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$.

解　当 x 由 1 变到 $1+\Delta x$ 时，函数相应的增量为

$$\Delta y=(1+\Delta x)^3-1^3=3\cdot\Delta x+3\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3+3\Delta x+(\Delta x)^2,$$

所以

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[3+3\Delta x+(\Delta x)^2]=3.$$

例 2　设 $f'(0)$ 存在，试求下列各极限：

（1）$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}$；　　（2）$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$，其中 $f(0)=0$.

解　（1）$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}=\lim_{2x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{\frac{1}{2}\cdot(2x-0)}$$

$$=2\cdot\lim_{2x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}=2f'(0);$$

（2）因为 $f(0)=0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

三、简单函数的求导

下面根据导数的定义求一些简单函数的导数.

例 3　求 $f(x)=C$(C 为常数)的导数.

解　$(C)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0.$

例 4　求 $f(x)=x^n$(n 为正整数)的导数.

解　$(x^n)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right)=nx^{n-1}$，即 $(x^n)'=nx^{n-1}$.

一般地，当 $x\neq 0$ 时，$y=x^{\mu}$ 有定义时，

$$(x^{\mu})'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}=x^{\mu}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\Delta x}=x^{\mu}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}.$$

当 $x=0$ 时，$y=x^{\mu}$ 有定义时也有上式成立.

例如，取 $\mu=\dfrac{1}{2}$，则有 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$；取 $\mu=-1$，则有 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

例 5　求 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　$(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

同理，$(\cos x)'=-\sin x$.

例 6　求 $f(x)=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的导数.

解　$(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}^x,$$

即以 e 为底的指数函数的导数就是它本身.

例 7　求 $f(x)=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$ 的导数.

解　$(\log_a x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x\cdot\ln a}=\dfrac{1}{x\ln a}.$

特别地，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

四、左、右导数

下面我们来看 $y=|x|$ 点 $x=0$ 处的导数.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},$$

我们发现这个极限不存在，但是它的左极限

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

和右极限

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$$

都是存在的. 所以就像左、右连续的概念一样，我们需引入左、右导数的概念.

若

$$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称其为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记作 $f'_+(x_0)$；

若

$$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称其为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记作 $f'_-(x_0)$.

因此，如同左、右连续概念中的充要条件一样，我们有下列结论：

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右导数存在且相等.

现在，我们可回答函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导的原因：$f'_+(0)\neq f'_-(0)$.

例 8　已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$，$f'_-(0)$ 及 $f'(0)$.

解　$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

故 $f'(0)=1$.

五、切线与法线方程

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率

$$k=\tan\alpha=f'(x_0).$$

相应地，切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\ (f'(x_0)\neq0).$$

法线即为过切点 $M(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线.

例 9　求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ 处的切线斜率，并写出切线及法线方程.

解　$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

因此，切线方程为

$$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)，即\ 4x+y-4=0;$$

法线方程为

$$y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)，即\ 2x-8y+15=0.$$

六、函数的可导性与连续性的关系

定理 1　若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.

证明　若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，由定义得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，因此，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

故函数 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.

注　函数连续未必可导，这说明连续是可导的必要条件.

例如，函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，但在点 $x=0$ 处不可导. 这是因为在点 $x=0$ 处有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{-\frac{2}{3}}=+\infty,$$

即导数为无穷大(导数不存在). 从图形上看(见图 2-9)，在该点处有与 x 轴垂直的切线 $x=0$.

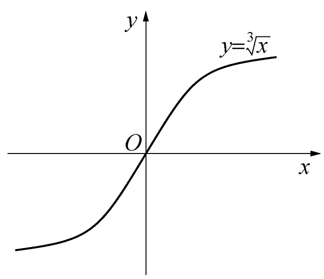


图 2-9

再比如，

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

由

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}不存在,$$

得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 由图形可知(见图 2-10)，曲线在 $x=0$ 附近无限次震荡.

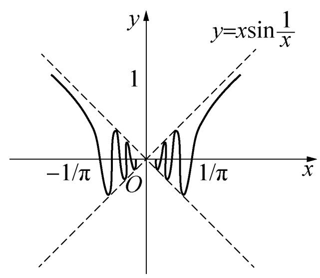


图 2-10

七、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 2　若 $u(x)$、$v(x)$ 在点 x 处的导数均存在，则它们的和、差、积、商的导数也都存在，且有

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x)\neq 0)$.

证明　我们仅证(2).

$$\begin{aligned}[u(x)\cdot v(x)]'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).\end{aligned}$$

注　(1) $[Cu(x)]'=Cu'(x)$，由此可得 $[\alpha u(x)+\beta v(x)]'=\alpha u'(x)+\beta v'(x)$.

(2) 若 $u'(x)$、$v'(x)$、$w'(x)$ 均存在，则 $[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)]'$ 存在，且

$$[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x).$$

(3) 上述公式可简记为

$$(u\pm v)'=u'\pm v'；(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'；\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}(v\neq 0).$$

利用商的导数公式可以得到另外四个三角函数的计算公式.

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x；$$

$$(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x；$$

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{0-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\sec x\tan x；$$

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x.$$

例 10　计算下列函数的导数：

(1) $y=3^x-\ln x+\sin x+\mathrm{e}$；　　(2) $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\dfrac{\pi}{7}$；

(3) $y=(x^2+3a^x)(\sin x-1)$；　　(4) $y=(2x+3)(1-x)(x+2)$；

(5) $y=\dfrac{x+1}{\ln x}$；　　(6) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}\tan x}{1+x^2}$.

解　(1) $y'=(3^x-\ln x+\sin x+e)'=(3^x)'-(\ln x)'+(\sin x)'+(e)'=3^x\ln 3-\dfrac{1}{x}+\cos x$

(2) $f'(x)=\left(x^3+4\cos x-\sin\dfrac{\pi}{7}\right)'=(x^3)'+(4\cos x)'-\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)'=3x^2-4\sin x.$

(3) $y'=[(x^2+3a^x)(\sin x-1)]'$

$=(x^2+3a^x)'(\sin x-1)+(x^2+3a^x)(\sin x-1)'$

$=(2x+3a^x\ln a)(\sin x-1)+(x^2+3a^x)\cos x.$

(4) $y'=(2x+3)'(1-x)(x+2)+(2x+3)(1-x)'(x+2)+(2x+3)(1-x)(x+2)'$

$=2(1-x)(x+2)+(2x+3)(-1)(x+2)+(2x+3)(1-x)$

$=-6x^2-10x+1.$

(5) $y'=\dfrac{(x+1)'\ln x-(x+1)(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-(x+1)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{x\ln x-(x+1)}{x(\ln x)^2}.$

(6) $f'(x)=2\cdot\dfrac{(\sqrt{x}\tan x)'(1+x^2)-\sqrt{x}\tan x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$

$$=2\cdot\frac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\tan x+\sqrt{x}\sec^2 x\right)(1+x^2)-\sqrt{x}\tan x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2x(1+x^2)\sec^2 x+(1-3x^2)\tan x}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}.$$

八、反函数的求导法则

定理 3　如果单调函数 $x=\varphi(y)$ 在某一区间 I_y 内可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间 $I_x=\{x\mid x=\varphi(y),\ y\in I_y\}$ 内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\bigg|_{y=f(x)}.$$

证明　由反函数存在定理可知 $f(x)$ 是单调、连续的，当 x 取得增量 Δx 时，

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$ ($f(x)$ 单调). 当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\Delta y\to 0$ ($f(x)$ 连续).

因为 $x=\varphi(y)$ 可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，即 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\neq 0$，因此，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

本定理也可简单叙述为：**反函数的导数等于直接函数导数的倒数**.

利用反函数的求导法则可以求出四个反三角函数的导数.

$y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，$x=\sin y\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在 $I_y=\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $(\sin y)'_y=\cos y>0$，因此，在对应的 $I_x=(-1,\ 1)$ 内，有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

（由于 $\cos y$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内大于零，故取正号）；

同理可得

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

（由于 $\sin y$ 在$(0,\ \pi)$内大于零，故取正号）；

$y=\arctan x$ 是 $x=\tan y\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$的反函数，$x=\tan y$ 在 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内单调、可导，且$(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0$，因此，在对应的 $I_x=(-\infty,\ +\infty)$内，有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2};$$

同理可得

$$(\operatorname{arccot} x)'=\frac{1}{(\cot y)'}=-\frac{1}{\csc^2 y}=-\frac{1}{1+\cot^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

九、求导公式与基本求导法则

至此，我们已经求出了所有基本初等函数的导数，且推出了函数的和、差、积、商的求导法则.

1. 基本求导公式：

(1) $(C)'=0$；　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$；

(3) $(\sin x)'=\cos x$；　(4) $(\cos x)'=-\sin x$；

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$；　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(9) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,\ a\neq 1)$；　(10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(11) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,\ a\neq 1)$；　(12) $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$；

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

2. 求导法则

若 u、v 可导，则

$$(u\pm v)'=u'\pm v';\ (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}(v\neq 0).$$

例 11　求函数$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2+1, & 1<x<2\end{cases}$的导数.

解　求分段函数的导数时，在每一段区间内的导数可按一般求导法则计算，但在分段点处的导数要用左、右导数的定义求之.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=(2x)'=2$；当 $1<x<2$ 时，$f'(x)=(x^2+1)'=2x$；

当 $x=1$ 时，$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-2}{x-1}=2$，

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2,$$

由 $f'_+(1)=f'_-(1)=2$ 知，$f'(1)=2$. 所以 $f'(x)=\begin{cases}2, & 0<x\leqslant1,\\ 2x, & 1<x<2.\end{cases}$

习题 2-1

1. 填空选择题：

（1）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{h}=$________；

（2）设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant0,\end{cases}$ 则 $f(0)=$________，$f'(0)=$________；

（3）设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $y'=$__________；

（4）设函数 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$，则 $f'(1)=$________；

（5）设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则 $f'(0)=$________，$[f(0)]'=$________；

（6）过曲线 $y=x^2$ 上点 $(2,4)$ 处的切线斜率为__________；

（7）函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x<1,\\ 3x-1, & x\geqslant1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　）；

A. 可导　　B. 连续但不可导　　C. 不连续　　D. 无定义

（8）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续是在该点处可导的（　　）；

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

2. 求下列函数的导数：

（1）$y=x^5$；　（2）$y=\sqrt[3]{x}$；　（3）$y=x\sqrt{x}$；

（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　（5）$y=\dfrac{1}{x^2}$；　（6）$y=\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{x}}$.

3. 已知 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin3x}$.

4. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性和可导性：

（1）$y=x^3$；　（2）$y=|x^3|$；　（3）$y=\sin x$；　（4）$y=|\sin x|$.

5. 求下列函数在定点处的导数：

（1）$y=\sin x-\cos x$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$，$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(2) $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$，$f'(2)$；

(3) $f(t)=\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$，求 $f'(4)$；

(4) $y=\arctan x+3\operatorname{arccot} x$，求 $f'(1)$，$f'(-1)$；

(5) 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$，求 $f'(1)$.

6. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的可导性：

(1) $y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0;\end{cases}$　　(2) $y=\begin{cases}e^x+1, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0.\end{cases}$

7. 求下列函数的导数($a\in\mathbf{R}$)：

(1) $y=a^x\cdot e^x$；　　(2) $y=x^a+a^x+a^a$；

(3) $y=x^2\cos x$；　　(4) $y=x\tan x-2\sec x$；

(5) $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$；　　(6) $y=\sqrt{x}(x-\cot x)\cos x$；

(7) $y=\ln(3x)+3\lg x$；　　(8) $y=x^3\ln x$；

(9) $y=x^2e^x\cos x$；　　(10) $y=\dfrac{e^x}{x^2+2x+1}$.

8. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$，$x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线，求抛物线上哪一点的切线平行于这条割线，并写出这条切线的方程.

9. 求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线与法线方程.

10. 求曲线 $y=x^3+x$ 上，其切线与直线 $y=4x$ 平行的点.

11. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任意一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

第二节　导数的计算法则

[课前导读]

这一节介绍复合函数的求导法则，高阶导数、隐函数和参数方程的求导法则. 为了学习这些知识，我们要先熟悉下列内容.

(1) 复合函数的正确分解：$y=f[g(x)]$ 由内函数 $u=g(x)$ 和外函数 $y=f(u)$ 复合而成. 例如，$y=\sin^2x$ 由 $u=\sin x$ 和 $y=u^2$ 复合而成，$y=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 由 $u=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 和 $y=\ln u$ 复合而成.

(2) 函数的表示方式：函数 $y=f(x)$ 表示变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系可以用不同的方式表达. 例如，$y=\sin x$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，用这种方式表达的函数叫作显函数. 但也有些函数的表达方式不是这样，如 $xe^y-y+1=0$，$x+y^3+1=0$，通过一个方程确定变量 y 与 x 之间的对应关系，这样的函数称为隐函数.

(3) 由参数确定的方程：在实际问题中，函数 y 与自变量 x 可能不是直接由 $y=f(x)$ 表示，而是通过一参变量 t 来表示，即

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t).\end{cases}$$

一、复合函数的求导法则

前面讨论的求导问题，仅限于基本初等函数和一些较简单的函数. 对于在实际中经常用到的复合函数来说，我们不知道它们是否可导？如果可导，又该怎样计算. 我们需要引进下面的重要法则来解决这一问题，从而扩大函数求导的范围.

定理 1(复合函数的求导法则)　如果 $y=f(u)$ 在点 u 处可导，$u=g(x)$ 在点 x 处可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{(即 }y'(x)=f'(u)\cdot g'(x)\text{)}.$$

* **证明**　因为 $y=f(u)$ 在点 u 处可导，故 $f'(u)=\lim\limits_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,\text{ 其中 }\lim_{\Delta u\to0}\alpha=0.$$

当 $\Delta u\neq0$ 时，用 Δu 乘上式两边，得 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$；　(1)

当 $\Delta u=0$ 时，规定 $\alpha=0$，此时由于 $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$，(1)式也成立.

故当 $\Delta x\neq0$ 时，由(1)式除以 Δx，得 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

由 $u=g(x)$ 在点 x 处连续(可导⇒连续)知，当 $\Delta x\to0$ 时，

$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)\to0$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\alpha=\lim\limits_{\Delta u\to0}\alpha=0$，因此，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)g'(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

复合函数的求导法则也称为链式法则，它可推广到有限个函数复合的情形. 比如，若 $y=f(u)$，$u=g(v)$ 和 $v=h(x)$ 可导，则 $y=f\{g[h(x)]\}$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(v)\cdot h'(x).$$

例 1　求下列函数的导数：

(1) $y=\mathrm{e}^{2x}$；　(2) $y=\sin x^2$；

(3) $y=(x^2+1)^{10}$；　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(5) $y=\ln(\sin x)$；　(6) $y=\cos^2x$；

(7) $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{x}{2}}$；　(8) $y=(x+\sin^2x)^3$.

解　(1) 设 $y=\mathrm{e}^u$，$u=2x$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(e^u)'\cdot(2x)'=e^u\cdot 2=2e^u=2e^{2x}.$$

（2）设 $y=\sin u$，$u=x^2$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\sin u)'\cdot(x^2)'=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2.$$

（3）设 $y=u^{10}$，$u=x^2+1$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=10u^9\cdot 2x=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

（4）函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可以看作由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成，故

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\sqrt{u})'\cdot(1-x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

熟悉复合函数的求导公式后，可以省去中间变量.

（5）$y'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x.$

（6）$y'=2\cos x\cdot(\cos x)'=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x.$

（7）函数 $y=e^{\sin\frac{x}{2}}$ 由 $y=e^u$ 和 $u=\sin v$ 及 $v=\frac{x}{2}$ 复合而成，故

$$y'=(e^u)'\cdot(\sin\theta)'\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=e^u\cdot\cos v\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}.$$

（8）$y'=[(x+\sin^2x)^3]'=3(x+\sin^2x)^2(x+\sin^2x)'$

$=3(x+\sin^2x)^2[1+2\sin x\cdot(\sin x)']$

$=3(x+\sin^2x)^2(1+\sin 2x).$

例 2　求 $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的导数.

解　$y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$

例 3　求函数 $y=\ln\sqrt{x^2+1}$ 的导数.

解　因为 $y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$，所以

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+1}.$$

例 4　求幂指函数 $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0,\ x\neq 1)$ 的导数.

解　由对数的性质可知，$y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{\ln x}{x}}$，因此

$$y'=(x^{\frac{1}{x}})'=(e^{\frac{\ln x}{x}})'=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

例 5　已知 $f(u)$ 可导，求函数 $y=f(\tan x)$ 的导数.

解　$y=f(\tan x)$ 由 $y=f(u)$ 和 $u=\tan x$ 复合而成. 由复合函数的求导法则可知，

$y'=[f(\tan x)]'=f'(u)\cdot(\tan x)'$，即

$y'=[f(\tan x)]'=f'(\tan x)\cdot(\tan x)'=f'(\tan x)\cdot\sec^2 x.$

注　求此类含抽象函数的导数时，应特别注意记号表示的真实含义. 此例中，$f'(\tan x)$ 表示对 $\tan x$ 求导，而$[f(\tan x)]'$表示对 x 求导.

二、高阶导数

1. 二阶导数的概念

如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，那么就称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}\text{或}\frac{d^2f}{dx^2},$$

即 $y''=(y')'$，$f''(x)=[f'(x)]'$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$或$\dfrac{d^2f}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$.

例如，$(\sin x)'=\cos x$，$(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x$.

例 6　设 $f(x)=x^2+\ln x$，求 y''.

解　$y'=2x+\dfrac{1}{x}$，$y''=2-\dfrac{1}{x^2}$.

例 7　设 $y=\arctan x$，求 $f''(0)$.

解　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$f''(x)=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，

$$f''(0)=\left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0}=0.$$

例 8　证明 $y=e^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$.

证明　$y'=(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$，

$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$，

所以 $y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2e^x(\sin x+\cos x)+2e^x\sin x=0$，

故 $y=e^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$.

2. 二阶导数的物理意义

设质点沿直线运动，在直线上给定原点和单位点(表示实数 1 的点)，使直线成为数轴. 另外，再取定一个时刻为计时的零点. 质点于时刻 t 在直线上的位置的坐标记为 s，这样，质点的运动完全由某个函数 $s=s(t)$ 所确定.

在最简单的匀速直线运动的情形中，质点经过的路程与所用的时间成正比，即 $v=\dfrac{s}{t}$. 如果是非匀速直线运动，取从 t_0 时刻到 $t_0+\Delta t$ 这样一段时间间隔，在$[t_0,\ t_0+\Delta t]$上质点所走过的路程 s 有相应增量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$，这段区间上的平均速度

$$\bar{v}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{2}$$

若令 $t\to t_0$，即 $\Delta t\to 0$，那么 $\bar{v}$ 的极限值就精确地反映了质点在时刻这一瞬间运动的快

慢程度. 因此在 $t=t_0$ 时, 瞬时速度即为

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=s'(t_0).$$

一般地, 变速直线运动的速度 $v(t)$ 就是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数, 即

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \text{或 } v=s'.$$

而加速度 $a(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的变化率, 即速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的导数, 即

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right), \text{或 } a=(s')'=s''=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}.$$

3. *n* 阶导数的计算

一般地, 设 $n\in\mathbf{Z}^+$, $n\geqslant 2$, 如果 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数仍可导, 便称为 $f(x)$ 的 n 阶导数. 其中, 三阶导数的记号为

$$y''', f'''(x), \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\text{或}\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3};$$

$n\geqslant 4$ 时, n 阶导数的记号是 $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$或$\dfrac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$.

二阶及二阶以上的导数均称为高阶导数, 称 $f'(x)$ 为一阶导数. 函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数时, 也称 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 具有 n 阶导数, 则 $f(x)$ 的一切低于 n 阶的导数均存在.

例 9　求 $y=x^\mu$ 的 n 阶导数.

解　$y'=\mu x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$,

$$y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

$$y^{(4)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)x^{\mu-4},$$

一般地,

$$y^{(n)}=(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdot\cdots\cdot(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

当 $\mu=n$ 时 ($n\in\mathbf{Z}^+$), $(x^n)^{(n)}=n!$, $(x^n)^{(n+1)}=0$.

例 10　设 $y=\dfrac{1}{1+x}$, 求 $y^{(n)}$.

解　$y'=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $y''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$, $y'''=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$, $y^{(4)}=\dfrac{4!}{(1+x)^5}$, $\cdots$,

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}(n\geqslant 1, 0!=1).$$

例 11　求 $\cos x$ 的 n 阶导数.

解　令 $y=\cos x$, $y'=(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right]'=-\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right).$$

若 $y^{(k-1)}=\cos\left[x+\frac{(k-1)\pi}{2}\right]$，则

$$y^{(k)}=\left\{\cos\left[x+\frac{(k-1)\pi}{2}\right]\right\}'=-\sin\left[x+\frac{(k-1)\pi}{2}\right]=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),$$

因此，

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

同样可得 $\sin x$ 的 n 阶导数 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

以上这些例子都可作为公式使用，因此，最好熟记它们.

例 12　求 $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$ 的 n 阶导数.

解　$f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$，

因此

$$\left(\frac{1}{x^2+5x+6}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}.$$

＊**定理 2（高阶导数的运算法则）**　若 $f(x)$，$g(x)$ 具有 n 阶导数，则

（1）$[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$，

（2）$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=fg^{(n)}+C_n^1 f'g^{(n-1)}+\cdots+C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}+\cdots+f^{(n)}g$，

其中 $C_n^k=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

公式（2）称为**莱布尼茨（Leibniz）公式**. 这个公式在形式上与二项式展开式相仿，可以这样来记：

在二项展开式 $(f+g)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{n-k}g^k$ 中，把函数的幂次改为导数的阶数，即得 $(f\cdot g)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$.

＊**例 13**　求 $y=x^2\sin x$ 的 50 阶导数.

解　$(x^2)'=2x$，$(x^2)''=2$，$(x^2)'''=0$，即 $(x^2)^{(n)}=0(n\geqslant 3)$，

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

故

$$\begin{aligned}(x^2\sin x)^{(50)}&=x^2(\sin x)^{(50)}+50\cdot(2x)(\sin x)^{(49)}+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot(\sin x)^{(48)}\\&=x^2\sin\left(x+\frac{50\pi}{2}\right)+50\cdot(2x)\sin\left(x+\frac{49\pi}{2}\right)+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot\sin\left(x+\frac{48\pi}{2}\right)\\&=x^2\sin x-100x\cos x-2\ 450\sin x\\&=(x^2-2\ 450)\sin x-100x\cos x.\end{aligned}$$

三、隐函数的导数

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y)=0$，如果在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地，总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么称方程 $F(x, y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为 $y=y(x)$.

将一个隐函数转化成显函数，叫作隐函数的显化. 比如，将 $x+y^3-1=0$ 写成 $y=\sqrt[3]{1-x}$ 就是指这个过程. 但有些函数显化却很困难，甚至不可能，比如 $e^x-e^y+\sin xy-1=0$，那么如何对隐函数求导呢？

设方程 $F(x, y)=0$ 确定了一个函数 $y=y(x)$，将 $y=y(x)$"代入"方程，便得到恒等式 $F(x, y(x))\equiv 0$. 在等式 $F(x, y(x))\equiv 0$ 两边关于 x 求导，且将 y 看作 x 的函数，即可解得 $\dfrac{dy}{dx}$.

例 14　设方程 $y=1+xe^y$ 所确定的隐函数为 $y=y(x)$，求 $y'\big|_{x=0}$.

解　将 $y=1+xe^y$ 两端对 x 求导数，得

$$y'=0+(xe^y)'=e^y+xe^y y',$$

故

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}.$$

在上式中，令 $x=0$，由 $y=1+xe^y$ 知 $y\big|_{x=0}=1$，故 $y'\big|_{x=0}=e$.

例 15　求由方程 $xy+\ln y=1$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 在点 $M(1, 1)$ 处的切线方程.

解　在题设方程两边同时对自变量 x 求导，得

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0,$$

解得 $y'=-\dfrac{y^2}{xy+1}$.

在点 $M(1, 1)$ 处，$y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\dfrac{1^2}{1\times1+1}=-\dfrac{1}{2}$.

于是，在点 $M(1, 1)$ 处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)，即\ x+2y-3=0.$$

对隐函数也可以求高阶导数. 只要在求导过程中始终将 y、y'、y'' 等看成 x 的函数即可.

例 16　设 $x^4-xy+y^4=1$，求 y'' 在点 $(0, 1)$ 处的值.

解　方程两边对 x 求导，得

$$4x^3-y-xy'+4y^3y'=0, \tag{3}$$

代入 $x=0$，$y=1$ 得 $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\dfrac{1}{4}$；

将方程(3)两边再对 x 求导得　$12x^2-2y'-xy''+12y^2(y')^2+4y^3y''=0$，

代入 $x=0$，$y=1$，$y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\dfrac{1}{4}$ 得　$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{1}{16}$.

例 17　求由方程 $x^y=y^x(x,y>0,x,y\neq1)$所确定的隐函数 y 对 x 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　先将方程取对数，得 $y\ln x=x\ln y$，然后两边关于 x 求导，即

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+x\frac{y'}{y},$$

得

$$y'=\frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}(xy\ln x-x^2\neq0),$$

其中 $y=y(x)$是由方程 $x^y=y^x$ 所确定的隐函数.

注　对于幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$，可将其写成 $y=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$ 再求导，也就是复合函数求导；也可两边取对数：

$$\ln y=v(x)\ln u(x),$$

将其视为隐函数 y 对 x 求导，这种求导的方法称为**对数求导法**. 对数求导法还适用于下列形式的函数.

例 18　设 $y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^x}$，求 y'.

解　等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x,$$

上式两边对 x 求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1,$$

故

$$y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right].$$

四、由参数方程确定的函数的导数

考虑由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$(其中 t 为参数)确定的函数 $y=y(x)$的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 如果能从 $x=\varphi(t)$中解出 $t=\varphi^{-1}(x)$，则由 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$求得导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 这个方法实质是消去参数 t，但这个工作是困难的(有时是不可能的，如$\begin{cases}x=\sin t+\mathrm{e}^t,\\y=t^2+\cos t.\end{cases}$). 现在我们希望有一种方法，能直接由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$算出它们所确定的函数的导数. 下面就来讨论这种求导数的方法.

如果 $x=\varphi(t)$ 的反函数为 $t=\varphi^{-1}(x)$，且它满足反函数的求导条件，则可将 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$看作 $y=\psi(t)$与 $t=\varphi^{-1}(x)$的复合函数. 利用反函数的求导法则，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

这里 $\varphi'(t)\neq 0$ 是反函数的求导法则中的条件之一.

如果 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 二阶可导，则有二阶导数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

类似地，我们可求得更高阶的导数.

例 19　已知圆的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t\end{cases}$（$a>0$），求$\frac{dy}{dx}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t.$

例 20　设参数方程为$\begin{cases}x=a\cos^3\varphi,\\ y=b\sin^3\varphi\end{cases}$　（a，$b>0$），求$\frac{dy}{dx}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{3b\sin^2\varphi\cos\varphi}{3a\cos^2\varphi(-\sin\varphi)}=-\frac{b}{a}\tan\varphi.$

例 21　设参数方程为$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t,\end{cases}$求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2};$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

例 22　设参数方程为$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=-a\cos t\end{cases}$求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t};$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a\,(1-\cos t)^2}.$$

或直接运用公式求二阶导数：

由 $\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\frac{dy}{dt}=a\sin t$，$\frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t$，$\frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t$ 得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

$$=\frac{a(1-\cos t)a\cos t-a^2\sin^2 t}{a^3\,(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a\,(1-\cos t)^2}.$$

*五、相关变化率

设 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 均可导，且由 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定了 x 与 y 之间存在着某种关系，这样 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$（变化率）之间也存在一定的关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率. 我们研究这种关系，就是希望从一个已知的变化率求出另一个未知的变化率.

例 23　一长为 5 m 的梯子斜靠在墙上. 如果梯子下端以 0.5 m/s 的速率滑离墙壁，试求梯子下端离墙 3 m 时，梯子上端向下滑落的速率.

解　如图 2-11 所示，x 表示梯子下端离墙的距离，y 表示梯子上端到地面的距离，这里 x，y 都是时间 t 的函数，于是 $x^2+y^2=25$.

两边对 t 求导，得

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0,\ \text{即}\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

注意到 $x=3$，$y=4$ 以及 $\frac{dx}{dt}=0.5$，代入得

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3}{8},$$

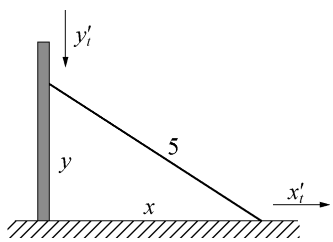


图 2-11

即梯子上端向下滑落的速率为 $\frac{3}{8}$ m/s.

习题 2-2

1. 选择题：

(1) 设 $y=f(-2x)$，则 $y'=($　　$)$；

A. $f'(2x)$　　B. $-f'(-2x)$　　C. $f'(-2x)$　　D. $-2f'(-2x)$

（2）设 $f(x)=\arctan e^{x}$，则 $f'(x)=($　　$)$；

A. $\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}$　　B. $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$　　C. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$　　D. $\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

（3）设 $y=\ln x$，则 $y''=($　　$)$；

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $-\dfrac{1}{x^{2}}$　　C. $\dfrac{1}{x^{2}}$　　D. $-\dfrac{2}{x}$

（4）设 $f(x)=x^{3}-x^{2}+x+1$，则 $f''(0)=($　　$)$；

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. -2

（5）设 $y=x^{n}+e^{x}$，则 $y^{(n)}=($　　$)$；

A. e^{x}　　B. $n!$　　C. $n!+ne^{x}$　　D. $n!+e^{x}$

（6）设 $y=e^{ax}$，则 $y^{(n)}=($　　$)$.

A. ae^{ax}　　B. $a^{n}e^{ax}$　　C. e^{ax}　　D. $a^{2}e^{ax}$

2. 填空题：

（1）设曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^{2}}$在点 M 处的切线平行于 x 轴，则点 M 的坐标为__________；

（2）过曲线 $y=\dfrac{4+x}{4-x}$上点(2，3)处的切线的斜率为__________；

（3）设 $f(x)=a_{0}x^{n}+a_{1}x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_{n}$，则$[f(0)]'=$__________；

（4）一物体按规律 $s(t)=3t-t^{2}$ 做直线运动，速度 $v\left(\dfrac{3}{2}\right)=$__________；

（5）设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $f'(0)=$__________.

3. 求下列各复合函数的导数：

（1）$y=\sin 2x$；　　（2）$y=e^{-2x}$；

（3）$y=(2x+1)^{2}$；　　（4）$y=\ln(1+3x)$；

（5）$y=\sqrt{\ln x}$；　　（6）$y=3^{\sqrt{x}}$；

（7）$y=(2x^{2}-1)^{2}$；　　（8）$y=\sin(4x+1)$；

（9）$y=\ln(x^{3}+1)$；　　（10）$y=\sin^{2}x$；

（11）$y=\ln(\ln x)$；　　（12）$y=\sqrt{x^{2}-2x+3}$；

（13）$y=\ln\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}$；　　（14）$y=e^{\cos x+x}$；

（15）$y=2^{\sin x}$；　　（16）$y=(x^{2}-4x+5)^{3}$.

4. 求下列各复合函数的导数：

（1）$y=(4x+1)^{5}$；　　（2）$y=5e^{3x}+x^{2}$；

（3）$y=\sin 3^{x}$；　　（4）$y=5^{\sin 2x}$；

（5）$y=\tan^{2}x$；　　（6）$y=\cot\sqrt{x}$；

（7）$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$；　　（8）$y=\operatorname{arccot} 2x$；

（9）$y=\cos x^{2}+2\sin 2x$；　　（10）$y=x\sqrt{1-x^{2}}$；

（11）$y=x^{2}\sin\dfrac{1}{x}$；　　（12）$y=x\arctan\dfrac{x}{3}$；

(13) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;　　(14) $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

(15) $y=e^{\frac{x}{\ln x}}$;　　(16) $y=\sin\sqrt{x^2+1}$;

(17) $y=2\tan^2\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;　　(18) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

5. 求下列函数的导数:

(1) $y=\ln(2x^2+1)$;　　(2) $y=\sin(3x^2+1)^3$;

(3) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$;　　(4) $y=\sin^n x\cos nx$;

(5) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.　　(6) $y=\arcsin(1-2x)$;

(7) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;　　(8) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

(9) $y=e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x$;　　(10) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$;

(11) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$;　　(12) $y=e^{-x}(x^2-2x)$;

(13) $y=\ln\ln\ln x$;　　(14) $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$;

(15) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;　　(16) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$;

(17) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;　　(18) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

6. 设 $f(u)$ 可导, 求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(e^{x^2})$;　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

(3) $y=\arctan f(x)$;　　(4) $y=f(e^{2x}+2\ln x)$.

7. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=x\ln x$;　　(2) $y=\cos x+\tan x$;

(3) $y=e^{1-2x}$;　　(4) $y=\ln(1-x^3)$;

(5) $y=(1+x^2)\arctan x$;　　(6) $y=\dfrac{\tan x}{x}$;

(7) $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$;　　(8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(9) $y=\cos^2 x\ln x$;　　(10) $y=\ln(\sqrt{2+x^2}-x)$.

8. 求下列函数的高阶导数:

(1) $y=e^x\cos x$, 求 y''';　　(2) $y=\sin 2x$, 求 $y^{(n)}$;

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$, 求 y'';　　(4) $y=2^x$, 求 $y^{(n)}$.

9. 设 $y=\ln(1+2x-3x^2)$, 求 $y^{(4)}$.

10. 求下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $x^2+y^2-xy=\ln 2$;　　(2) $y=x+x\ln y$;

（3）$y=\cos(x+y)$；

（4）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$；

（5）$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$；

（6）$xy=e^{x+y}$；

（7）$y=1+ye^x$；

（8）$y=x^{\frac{1}{y}}$；

（9）$x^y+y^x=1$.

11. 设方程 $e^x-e^y=xy$ 确定 y 是 x 的函数，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

12. 设方程 $xy^3=2y-1$ 确定 y 是 x 的函数，则 y 为整数时，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

13. 求由方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（1）$y^2+\ln y+x=0$；

（2）$y=\ln(x-y)$；

14. 利用对数求导法求下列函数的导数：

（1）$y=x^x$；

（2）$(\cos y)^x=(\sin x)^y$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt{x+1}(2-x)^3}{(x-1)^4}$；

（4）$y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{1-\sin x}}}$.

15. 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $M(x_0, y_0)$处的切线方程.

16. 已知下列参数方程，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（1）$\begin{cases}x=t^4,\\y=4t;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t);\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+t},\\y=\dfrac{t}{1+t};\end{cases}$

（4）$\begin{cases}x=at+b,\\y=\dfrac{1}{2}at^2.\end{cases}$

17. 求曲线$\begin{cases}x=1+t^2,\\y=t^3\end{cases}$在 $t=2$ 处的切线方程.

18. 求$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\\y=\sin t\end{cases}$在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程和法线方程.

19. 设$\begin{cases}x=\ln t+e^2,\\y=\dfrac{1}{1-t},\end{cases}$求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{1}{2}}$.

*20. 一飞机在离地面 2 km 的高度，以每小时 200 km 的速度水平飞行到某目标上空，以便进行航空摄影，试求飞机至该目标正上方时摄影机转动的角速度.

*21. 河水以 8 m^3/s 的体流量流入水库中，水库形状是长为 4000 m、顶角为 120°的水槽，问：水深 20 m 时，水面每小时上升几米？

*22. 溶液从深 18 cm、顶直径 12 cm 的正圆锥形容器中抽入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中，开始时圆锥容器中盛满了溶液，已知当溶液在容器中深为 12 cm 时，其表面下降的速

率为 1 cm/min，问：此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

*23. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波半径的增大率总是 6 m/s，问：在 2 s 末扰动水面面积的增大率为多少？

第三节　微分的概念与应用

[课前导读]

我们先来试着计算这样的两组数：

$\Delta y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{3}$，$\Delta x=0.1$，$0.01$，$0.001$，$0.000\,1$，$0.000\,01$，$0.000\,001$，

$dy=(\sin x)'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}\cdot\Delta x$，$\Delta x=0.1$，$0.01$，$0.001$，$0.000\,1$，$0.000\,01$，$0.000\,001$.

通过计算可以发现什么规律呢？

(1) 计算 dy 比计算 Δy 容易得多；

(2) 当 Δx 越来越小时，dy 和 Δy 越接近.

所以，有些时候，我们可以用 dy 来近似替代 Δy，因为它极容易计算，误差又小.

一、微分的定义

在理论研究和实际应用中，常常会遇到这样的问题：当自变量 x 有微小变化 Δx 时，求函数 $y=f(x)$ 的微小改变量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

这个问题初看起来似乎只要做减法运算就可以了，然而，对于较复杂的函数 $f(x)$，差值 $f(x+\Delta x)-f(x)$ 却是一个更复杂的表达式，不易求出其值. 一个想法是：我们设法将 Δy 表示成 Δx 的线性函数，即线性化，从而把复杂问题化为简单问题. 微分就是实现这种线性化的一种数学模型.

首先看一个实例.

例 1　一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问：此薄片的面积改变了多少？

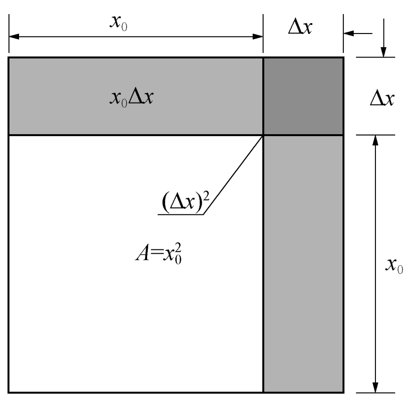


图 2-12

解　设此薄片的边长为 x_0，面积为 A，则 $A=x_0^2$. 薄片受温度变化的影响，当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 取得增量 Δx 时，面积的改变量可以看成是因变量 A 取得相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

从上式可以看出，ΔA 由两部分组成：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，即图 2-12 中灰色的两个矩形面积之和，而第二部分 $(\Delta x)^2$ 在图中是黑色的小正方形面积. 当 $\Delta x\to0$ 时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)\ (\Delta x\to0)$. 由此可见，如果边长改

变很微小，即$|\Delta x|$很小时，面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分来代替.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 满足一定条件，则因变量的增量 Δy 可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，因此 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，且它与 Δy 的差

$$\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$$

是比 Δx 高阶的无穷小. 所以，当 $A\neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，我们就可以近似地用 $A\Delta x$ 来代替 Δy.

抛开上述例子的实际背景，即得到微分的定义.

定义　设函数 $f(x)$ 在某区间 I 内有定义，x_0，$x_0+\Delta x\in I$，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 为不依赖于 Δx 的常数，而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，而 $A\Delta x$ 叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x$.

定理　函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导.

证明　设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，则有 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$.

当 $\Delta x\neq 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，因此，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=A,$$

即 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导.

反之，若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在. 因此$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，即

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$$

由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=0$，知 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$，即

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\Delta x+o(\Delta x),$$

即函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微.

由上述证明可知，若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，其微分

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x=f'(x_0)\Delta x.$$

例 2　设 $y=x^2$，求：(1) $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$；(2) $\mathrm{d}y\big|_{x=1}$ 及 $\mathrm{d}y\big|_{x=0.01}$.

解　(1) $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=(x^2)'\Big|_{x=x_0}\Delta x=(2x)\Big|_{x=x_0}\Delta x=2x_0\Delta x$；

(2) $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=2\Delta x$，$\mathrm{d}y\big|_{x=0.01}=0.02\Delta x$.

例 3　求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 时，Δx 分别等于 0.01 和 0.000 1 时的增量与微分.

解　当 $x=1$，$\Delta x=0.01$ 时，

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=(1.01)^3-1^3=1.030\ 301-1=0.030\ 301,$$

$$dy\big|_{x=1}=3x^2\Delta x\big|_{x=1,\ \Delta x=0.01}=3\times0.01=0.03;$$

当 $x=1$，$\Delta x=0.0001$ 时，

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=(1.0001)^3-1^3=1.000300030001-1=0.000300030001,$$

$$dy\big|_{x=1}=3x^2\Delta x\big|_{x=1,\ \Delta x=0.0001}=3\times0.0001=0.0003.$$

通过计算可以发现，

当 $\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y-dy=0.0003$；当 $\Delta x=0.0001$ 时，$\Delta y-dy=0.000000030001$.
这时，用 dy 的值近似替代 Δy 的值，误差是非常小的.

二、基本初等函数的微分公式及微分法则

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都可微，则称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的可微函数. 函数 $f(x)$ 在任意一点 x 处的微分就称为函数的微分，记为 dy，即有

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

我们规定 $dx=\Delta x$，这样微分可记为

$$dy=f'(x)dx,$$

并且有

$$y'=\frac{dy}{dx}.$$

在引入微分概念前，我们将导数 $\frac{dy}{dx}$ 看作一个整体记号. 现在引入微分概念后，可将导数看作是两个微分（函数微分与自变量微分）的商，因此也称导数为“微商”.

当 $\Delta x\to0$ 时，Δy、dy 都是无穷小，当 $y'(x)\neq0$ 时

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y-y'\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to0}\left[1-\frac{y'}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}\right]=0,$$

这表明在 $y'(x)\neq0$ 的条件下，当 $\Delta x\to0$ 时，$\Delta y-dy$ 不仅为 $o(\Delta x)$，还是 $o(\Delta y)$，因此称 dy 是 Δy 的主部. 又由 $dy=f'(x)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，则称 dy 是 Δy 的线性主部（当 $\Delta x\to0$ 时）.

又因为当 $\Delta x\to0$ 时，Δy、dy 都是无穷小，且

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{dy}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{y'\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{y'}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=1\ (y'\neq0),$$

故当 $|\Delta x|$ 很小时，可以用 dy 代替 Δy，即 $\Delta y\approx dy$.

由于导数可看作微商 $y'=\frac{dy}{dx}$，即 $dy=y'dx$，故由导数的公式和求导法则很容易得到微分公式及微分法则.

（1）$d(C)=0\ (C\in\mathbf{R})$；

（2）$d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx\ (\alpha\in\mathbf{R})$；

（3）$d(a^x)=a^x\ln a\,dx\ (a>0$ 且 $a\neq1)$；

（4）$de^x=e^x dx$；

（5）$d(\log_a x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}dx\ (a>0$ 且 $a\neq1)$；

（6）$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$；

（7）$d(\sin x)=\cos x dx$；（8）$d(\cos x)=-\sin x dx$；

（9）$d(\tan x)=\sec^2 x dx$；（10）$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$；

（11）$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$；（12）$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$ ；

（13）$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；（14）$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

（15）$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$；（16）$d(\text{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$；

（17）$d(u\pm v)=(u\pm v)'dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv$；

（18）$d(u\cdot v)=(u\cdot v)'dx=u'vdx+uv'dx=vdu+udv$；

（19）$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\left(\dfrac{u}{v}\right)'dx=\left(\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\right)dx=\dfrac{vu'dx-uv'dx}{v^2}=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$；

（20）设 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$ 可微，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 可微，且它的微分为

$$dy=y'dx=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx,$$

由 $du=\varphi'(x)dx$，得 $dy=f'(u)du$.

由此可见，不管 u 是自变量，还是中间变量（另一变量的可微函数），微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变，这一性质称为微分形式的不变性.

例 4　设 $y=\cos\sqrt{x}$，求 dy.

解　$dy=f'(x)dx=(\cos\sqrt{x})'dx=(-\sin\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$

例 5　设 $y=e^{\cos^2 x}$，求 dy.

解　应用微分形式的不变性有（视 $\cos^2 x$ 为中间变量）

$$\begin{aligned}dy&=e^{\cos^2 x}d(\cos^2 x)=e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x d(\cos x)\\&=e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x(-\sin x)dx\\&=-(\sin 2x)e^{\cos^2 x}dx.\end{aligned}$$

例 6　设 $y=\ln(1-x)\sin x$，求 dy.

解一

$$\begin{aligned}dy=y'dx&=[\ln(1-x)\sin x]'dx=\left[\frac{(-1)\sin x}{1-x}-\ln(1-x)\cos x\right]dx\\&=\frac{\sin x+(1-x)\ln(1-x)\cos x}{x-1}dx;\end{aligned}$$

解二

$$\begin{aligned}dy=d[\ln(1-x)\sin x]&=\sin x d[\ln(1-x)]+\ln(1-x)d(\sin x)\\&=\frac{\sin x}{1-x}d(1-x)+\ln(1-x)\cos x dx\\&=\frac{\sin x}{1-x}(-1)dx-\ln(1-x)\cos x dx\\&=\frac{\sin x+(1-x)\ln(1-x)\cos x}{x-1}dx.\end{aligned}$$

例 7　设 $y=y(x)$是由方程 $x^2y+xy^2=1$ 确定的隐函数，求 $\mathrm{d}y$.

解　我们用微分法来计算这个问题.

由 $\mathrm{d}(x^2y+xy^2)=\mathrm{d}(1)=0$，得

$$2x\mathrm{d}x\cdot y+x^2\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\cdot y^2+x\cdot 2y\mathrm{d}y=0,$$

即$(2xy+y^2)\mathrm{d}x+(x^2+2xy)\mathrm{d}y=0$，因此

$$\mathrm{d}y=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}\mathrm{d}x.\ (x^2+2xy\neq 0)$$

三、微分的几何意义

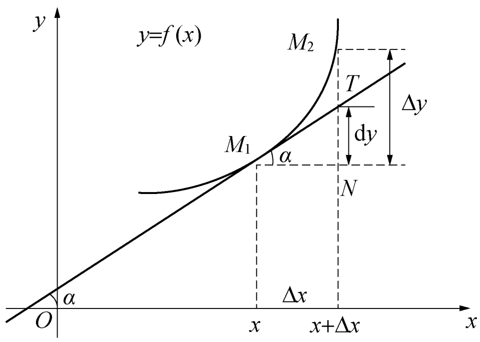
在曲线 $y=f(x)$上取相邻的两点 $M_1(x, y)$和 $M_2(x+\Delta x, y+\Delta y)$，过点 M_1 作曲线的切线 M_1T，设 M_1T 的倾角为 α，则 M_1T 的斜率为 $\tan\alpha=f'(x)$.

从图 2-13 可知

$$M_1N=\Delta x,\ NM_2=\Delta y,$$

$$NT=M_1N\cdot\tan\alpha=f'(x)\Delta x=\mathrm{d}y.$$

因此，当 Δy 是曲线对应于点 x 的函数增量时，$\mathrm{d}y$ 即是过点 $M_1(x, y)$的切线的纵坐标增量. 图中线段 TM_2 是 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之差，是比 Δx 更高阶的无穷小.



微分的几何解释

图 2-13

由此可见，对于可微函数 $y=f(x)$而言，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$上的点的纵坐标的增量时，$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量. 当$|\Delta x|$很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$比$|\Delta x|$小得多.

因此在点 M_1 的邻近，我们可用切线段来近似代替曲线段.

四、近似计算

在工程问题中，经常会遇到一些复杂的计算公式，如果直接用这些公式进行计算，既费力又费时. 利用微分往往可以把一些复杂的计算公式改用简单的近似公式来代替.

如果$f(x)$在 x_0 处可微，且(1) $f'(x_0)\neq 0$，(2) $|\Delta x|$很小，则

$$\Delta y\approx\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x,$$

即若记 $x=x_0+\Delta x$，则有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

即在 x_0 附近可用 x 的线性代数 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来近似表达函数 $f(x)$.

例 8　利用微分计算 $\sin 30°30'$ 的近似值.

解　$30°30'=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}$，取 $f(x)=\sin x$，$x_0=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=\frac{\pi}{360}$，

因此 $\sin 30°30'\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.5076$.

在工程中常用的几种近似公式有

（一般取 $x_0=0$，$\Delta x=x$，$|\Delta x|$很小，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$）

（1）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$；

（2）$\sin x\approx x$；

（3）$\tan x\approx x$；

（4）$e^x\approx 1+x$；

（5）$\ln(1+x)\approx x$.

例 9　计算 $\sqrt[6]{65}$ 的近似值.

解　$\sqrt[6]{65}=\sqrt[6]{1+64}=2\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}}\approx 2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right)\approx 2.0052$.

习题 2-3

1. 填空选择题：

（1）$f(x)$在点 x_0 处可导是 $f(x)$在点 x_0 处连续的________，$f(x)$在点 x_0 处连续是 $f(x)$在点 x_0 处可导的________，$f(x)$在点 x_0 处可导是 $f(x)$在点 x_0 处可微的________；

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

（2）设函数 $f(x)$ 可导，则当 x 在 $x=2$ 处有微小增量 Δx 时，函数的增量约为__________；

A. $f'(2)$　　B. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$　　C. $f(2+\Delta x)$　　D. $f'(2)\Delta x$

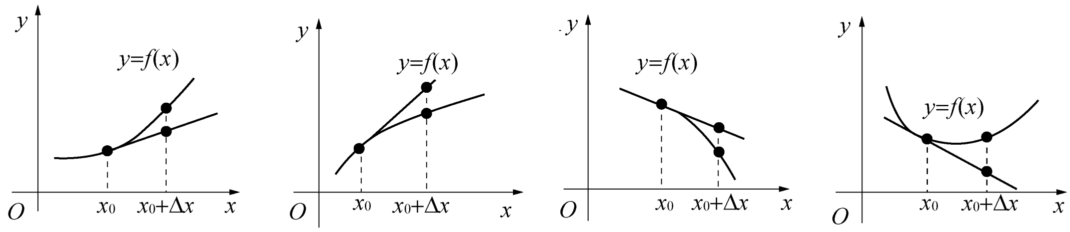
（3）设 $f(x)$ 可微，则 $d[e^{f(x)}]=$__________；

（4）设函数 $f(x)$ 可导，$y=f(-x^2)$，则 $dy=$__________；

（5）$\frac{d(\ln x)}{d(\sqrt{x})}=$____________；

（6）设 $f(x)$ 为可微的偶函数，且对任意的 $x_0(x_0\neq 0)$，$f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则 $f'(-x_0)=$____________.

2. 试在图 A、B、C、D 中分别标出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的 dy、Δy 及 $\Delta y-dy$，并说明其正负.



3. 已知 $y=x^2-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 0.1，0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

4. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有增量 $\Delta x=0.2$，对应的函数增量和线性主部都等于 0.8，求点 x_0 处的导数.

5. 求下列函数的微分：

（1）$y=x\ln x-x^2$；（2）$y=\arcsin\sqrt{x}$；

（3）$y=x\arctan\sqrt{x}$；（4）$y=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$；

（5）$y=1+xe^y$；（6）$y^2\cos x=\sin 3x$；

（7）$y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$；（8）$y=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$；

（9）$y=\tan^2(1+2x^2)$；（10）$y=3^{\ln(\tan x)}$；

（11）$y=x^{5x}$；（12）$e^{\frac{x}{y}}-xy=0$；

（13）$y^2+\ln y=x^4$；（14）$y=\cos(xy)-x$.

6. 将适当的函数填入括号内，使等式成立：

（1）$\mathrm{d}(\quad)=2\mathrm{d}x$；（2）$\mathrm{d}(\quad)=3x\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}(\quad)=\cos 2x\mathrm{d}x$；（4）$\mathrm{d}(\quad)=\sin\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x$；（6）$\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；（8）$\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；

（9）$\mathrm{d}(\quad)=\sin x\cos x\mathrm{d}x$；（10）$\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

7. 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，试问：$\Delta x\to 0$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 与 Δx 是否是等价无穷小？或同阶无穷小？是比 Δx 高阶的无穷小还是低阶的无穷小？

8. 当 $|x|$ 很小时，证明：

（1）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}$；（2）$\sin x\approx x$；

（3）$\tan x\approx x$；（4）$e^x\approx 1+x$；

（5）$\ln(1+x)\approx x$；（6）$\sqrt{a^2+x}\approx a+\dfrac{x}{2a}(a>0,\ |x|\ll a^2)$.

9. 利用微分求近似值：

（1）$e^{1.01}$；　　（2）$\cos 151°$；

（3）$\sqrt[3]{1.02}$；　　（4）lg11；

（5）arcsin0.500 2；　　（6）tan45′.

10. 水管壁的正截面是一个圆环，设它的内径为 R_0，壁厚为 d，利用微分计算这个圆环面积的近似值（d 相当小）.

11. 半径为 15 cm 的球，半径伸长 2 mm，球的体积约增加多少？

12. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$，半径 $R=100$ cm. 如果 R 不变，α 减少 30′，问：扇形面积大约改变多少？又如果 α 不变，R 增加 1 cm，问：扇形面积大约改变多少？

13. 扩音器插头为圆柱形，截面半径 r 为 0.15 cm，长度 l 为 4 cm. 为了提高它的导电性能，要在这个圆柱的侧面镀上一层厚为 0.001 cm 的纯铜，问：每个插头约需多少纯铜？

第四节　微分中值定理及其应用

[课前导读]

上一节给出了微分的近似计算：

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

即当 $\Delta x=x-x_0$“很小”时，$f(x)$ 可以由线性函数 $f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ 来近似替代.

但这个公式有两大缺陷：

（1）公式要求 Δx“很小”；

（2）公式只是一个近似替代，而不是一个精确值.

本节旨在改进这个近似式，使得对于任何 Δx 的值，均有等式成立. 那么如何改进呢？

现在将该近似公式改写成

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx f'(x_0),$$

从图形上看（见图 2-14）将过点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 及 $M(x, f(x))$ 的直线的斜率近似用曲线 $y=f(x)$ 上点 M_0 处的切线的斜率表示，它们一般不相等. 逐渐移动点的切线，就会发现，有一点 $\xi\in(x_0, x)$ 能够使这一点处的切线平行于连接端点的弦（见图 2-15）.

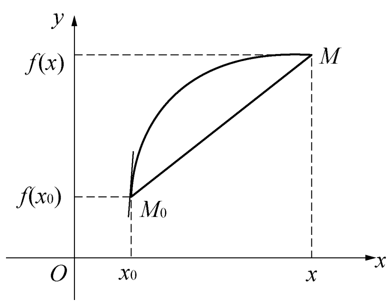


图 2-14

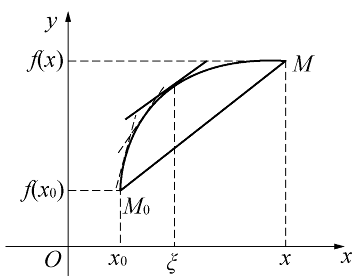


图 2-15

一、罗尔定理

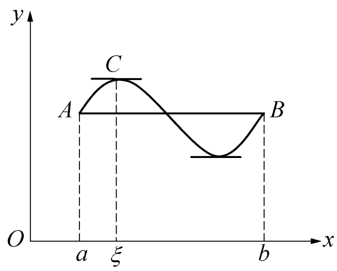


图 2-16

如图 2-16 所示，连续曲线弧 AB 是函数 $y=f(x)(x\in[a,b])$ 的图形. 此图形的两个端点的纵坐标相等，即 $f(a)=f(b)$，且除了端点外处处有不垂直于 x 轴的切线. 可以发现，在曲线弧的最高点或最低点处，曲线有水平的切线. 如果记 C 点的横坐标为 ξ，那么就有 $f'(\xi)=0$.

如果把这个几何现象描述出来，就可得到下面的罗尔定理. 为方便讨论，先介绍费马定理.

引理(费马定理)　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义并且在 x_0 处可导，对任意的 $x\in U(x_0)$，恒有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,(\text{或}\,f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么 $f'(x_0)=0$.（见图 2-17）

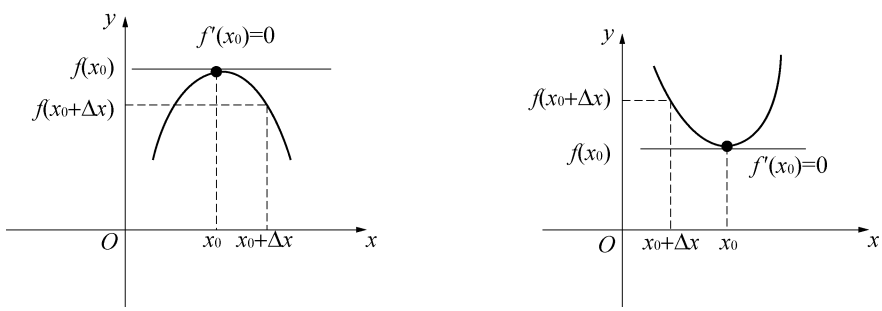


图 2-17

*证明　不妨设 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\leqslant f(x_0)$（如果 $f(x)\geqslant f(x_0)$，可以完全类似地证明），于是对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$，有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\leqslant 0$.

从而，当 $\Delta x>0$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的条件，再由极限的保号性，便得到

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

所以 $f'(x_0)=0$. 证毕.

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或称为稳定点、临界点).

定理 1(罗尔定理)　如果函数 $y=f(x)$ 满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）在区间端点处的函数值相等，即$f(a)=f(b)$，那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使函数$y=f(x)$在该点处的导数等于零：$f'(\xi)=0$.

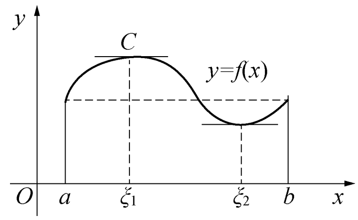


图 2-18

＊**证明**　由于$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必定取得最大值M和最小值m.

情况 1　$M=m$. 这时$y=f(x)$在区间$[a,b]$上必为常数：$y\equiv M$. 于是$f'(x)\equiv 0$. 因此任取一点$\xi\in(a,b)$，都有$f'(\xi)=0$.

情况 2　$M>m$. 这时M和m这两个数中至少有一个不等于$f(a)$. 不妨设$M\neq f(a)$（如果设$m\neq f(a)$，证明完全类似）. 由于$f(a)=f(b)$，因此$M\neq f(b)$. 于是存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=M$. 因此对区间$[a,b]$上的任意x，有$f(\xi)\geqslant f(x)$，从而由费马定理可知$f'(\xi)=0$，证毕.

罗尔定理的几何意义　如果曲线段$y=f(x)(x\in[a,b])$是连续不断的、光滑的，且两端纵坐标相等，则该曲线段在$[a,b]$上至少有一条水平切线.

需要指出的是，定理的三个条件是十分重要的. 如果某一个条件不满足，定理的结论就可能不成立. 下面举三个例子，并结合图像进行考察.

例 1　$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

函数$f(x)$在$[0,1]$的左端点$x=0$处间断（见图 2-19），不满足在闭区间上连续的条件. 此时虽然满足定理的另外两个条件，但显然没有水平切线.

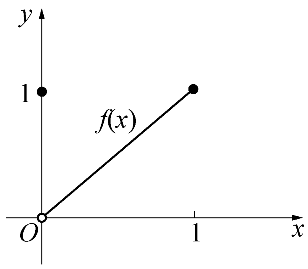


图 2-19

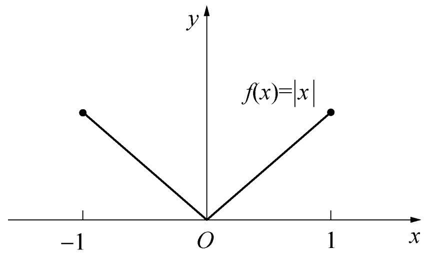


图 2-20

例 2　$f(x)=|x|$，$x\in[-1,1]$.

函数$f(x)$在$x=0$处不可导，因而不满足在开区间内可导的条件. 此时虽满足定理的另外两个条件，显然也没有水平切线（见图 2-20）.

例 3　$f(x)=x$，$x\in[0,1]$.

显然函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，但$f(0)=0\neq f(1)=1$，即在两端点处函数值相等的条件不满足，显然也没有水平切线（见图 2-21）.

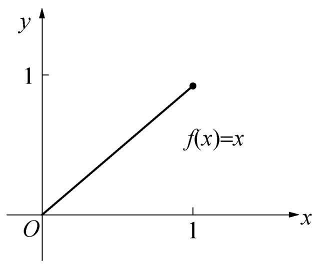


图 2-21

由此可见，应用这个定理时，一定要仔细验证是否满足

定理的三个条件，否则容易产生错误.

其次，要说明定理的三个条件是充分的，而非必要的. 也就是说，若满足定理的三个条件，则定理的结论必定成立. 如果定理的三个条件不完全满足的话，则定理的结论可能成立，也可能不成立.

例 4　验证函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间 $[-1, 2]$ 上满足罗尔定理的三个条件，并求出满足 $f'(\xi)=0$ 的点 ξ.

解　因为 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 是多项式，所以在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，故它在 $[-1, 2]$ 上连续，且在 $(-1, 2)$ 内可导. 容易验证 $f(-1)=f(2)=0$. 因此，$f(x)$ 满足罗尔定理的三个条件. $f'(x)=3x^2+8x-7$，令 $f'(x)=0$，即 $3x^2+8x-7=0$，解之得

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{37}}{3},\ x_2=\frac{-4-\sqrt{37}}{3}.$$

显然，x_2 不在 $[-1, 2]$ 内，应舍去. 而 $x_1\in[-1, 2]$，因而可把 x_1 取作 ξ，就有 $f'(\xi)=0$.

例 5　证明 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.

证明　(反证法)若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有两个零点 x_1, x_2，不妨设 $x_1<x_2$，即

$$f(x_1)=f(x_2)=0.$$

因此 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi\in(x_1, x_2)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

由于 $\xi\in(x_1, x_2)\subset[0, 1]$，故 $f'(\xi)=3\xi^2-3<0$，矛盾. 从而 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

定理 2(拉格朗日中值定理)　如果函数 $y=f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；　(2) 在开区间 (a, b) 内可导；

则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\text{即} f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值定理的几何解释

***证明**　作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a).$$

如图 2-22 所示，$F(x)$ 即为曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 的纵坐标之差.

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，则由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[x, x+\Delta x]$ (或 $[x+\Delta x, x]$) 上满足拉格朗日中值定理的条件，则有 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$，其中 $\xi=x+\theta\Delta x(0<\theta<1)$.

当 Δx 为有限时，增量 $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ 是准确值，因此它有时也称为**有限增量公式**. 它与用微分 $\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x$ 来表示函数的增量的近似值是不同的.

拉格朗日中值定理的几何意义　如果曲线段 $y=f(x)(x\in[a,b])$ 是连续不断的、光滑的，且除端点外处处具有不垂直于横坐标轴的切线，则该曲线段在 $[a,b]$ 上至少有一点，使曲线在该点处的切线与两端点的连线(弦)平行(见图 2-22).

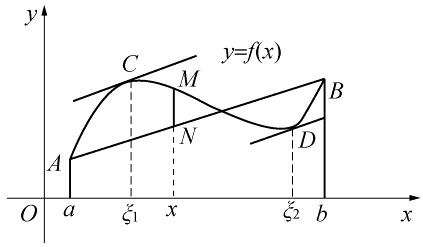


图 2-22

推论 1　若函数 $f(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x)$ 恒为零，则在区间 I 内恒有 $f(x)=C$(常数).

证明　对于 I 内任意两点 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

其中 $\xi\in(x_1, x_2)$. 因为 $f'(x)$ 恒为零，故有 $f(x_2)=f(x_1)$. 由 x_1、x_2 的任意性，得 $f(x)=C$(常数).

推论 2　若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 I 内满足 $f'(x)=g'(x)$，则在区间 I 内恒有 $f(x)=g(x)+C$，其中 C 为任意常数.

证明　取 $F(x)=f(x)-g(x)$，则函数 $F(x)$ 在区间 I 内满足 $F'(x)=0$，故有 $F(x)=C$，即 $f(x)=g(x)+C$，其中 C 为任意常数.

例 6　对于函数 $f(x)=\ln x$，在闭区间 $[1, \mathrm{e}]$ 上验证拉格朗日中值定理的正确性.

证明　$f(x)=\ln x$ 显然在 $[1, \mathrm{e}]$ 上连续，在 $(1, \mathrm{e})$ 内可导.

又
$$f(1)=\ln 1=0,\ f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}=1,\ f'(x)=\frac{1}{x},$$

设
$$\frac{\ln\mathrm{e}-\ln 1}{\mathrm{e}-1}=\frac{1}{\xi},$$

从而解得
$$\xi=\mathrm{e}-1\in(1, \mathrm{e}).$$

故可取 $\xi=\mathrm{e}-1$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\mathrm{e})-f(1)}{\mathrm{e}-1}$ 成立.

例 7　证明恒等式 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证明　设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$x\in[-1, 1]$，

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0$，所以 $f(x)=C$，$x\in[-1, 1]$.

又因为 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $C=\dfrac{\pi}{2}$，

从而 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

例 8　证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明　设 $f(x)=\ln(1+x)$，则 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件. 故

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\quad(0<\xi<x).$$

因为 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，从而 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}\ (0<\xi<x)$.

又因为 $1<1+\xi<1+x\Rightarrow\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$,

所以$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$, 即$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

三、柯西中值定理

定理 3(柯西中值定理)　设函数$f(x)$、$F(x)$满足

(1) 在$[a, b]$上连续;

(2) 在(a, b)内可导;

(3) 当 $x\in(a, b)$时, $F'(x)\neq0$(见图 2-23),

则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$, 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

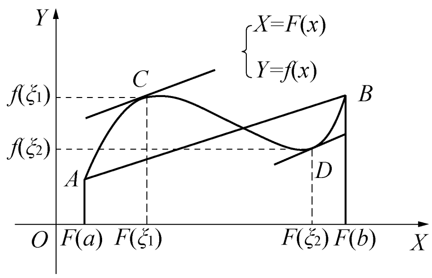


图 2-23

证明从略, 几何意义如图 2-23 所示.

例 9　设函数$f(x)$在$[0, 1]$上连续, 在$(0, 1)$内可导. 试证明至少存在一点 $\xi\in(0, 1)$, 使

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

证明　作辅助函数 $g(x)=x^2$, 则$f(x)$, $g(x)$在$[0, 1]$上满足柯西中值定理的条件, 故在$(0, 1)$内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

四、洛必达(L′Hospital)法则

我们在求极限时常常遇到两个函数都是无穷小或都是无穷大, 求它们的商的极限记为$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$型极限. 例如, 比较两个无穷小的阶时就出现了这样的极限. 这种极限可能存在, 也可能不存在. 通常称这种比值的极限为未定式. 例如, 重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$就是$\frac{0}{0}$型未定式, 而$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$就是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式. 这类极限不能直接使用极限的商的运算法则来计算. 本节将根据柯西中值定理来推导求这种极限的一种简便、重要且又很有效的方法——洛必达法则.

1. $x\to x_0$ 时$\frac{0}{0}$型极限

定理 4(洛必达法则)　设

(1) 当 $x\to x_0$ 时, 函数$f(x)$, $F(x)$都趋于零;

(2) 在点 x_0 的某邻域内(点 x_0 本身可以除外), $f'(x)$, $F'(x)$都存在, 且 $F'(x)\neq0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大),

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}(\text{或为无穷大}).$$

例 10 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}}{\cos x}=\dfrac{3e^0}{\cos 0}=3.$

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$仍属于 $x\to x_0$ 时$\dfrac{0}{0}$型极限,且 $f'(x)$、$F'(x)$满足上述定理条件,则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{F''(x)}$(或为无穷大).以此类推,可得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'''(x)}{F'''(x)}=\cdots(\text{或为无穷大}).$$

例 11 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

2. $x\to\infty$ 时$\dfrac{0}{0}$型极限

定理 4′ 如果 (1) 当 $x\to\infty$ 时,函数$f(x)$,$F(x)$都趋于零;

(2) 存在 $X>0$,当$|x|>X$ 时,$f'(x)$,$F'(x)$都存在,且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大),

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}(\text{或为无穷大}).$$

类似地,对 $x\to x_0$ 时$\dfrac{\infty}{\infty}$型的情形和 $x\to\infty$ 时$\dfrac{\infty}{\infty}$型的情形都有类似的结论.

例 12 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sin x\cos x}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\cos x}=-1.$

例 14　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)(n\in\mathbf{Z}^+)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

例 15　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)(n\in\mathbf{Z}^+)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{e^x}=0.$

注　对数函数 $\ln x$、幂函数 x^n、指数函数 e^x 均为当 $x\to+\infty$ 时的无穷大，但它们增大的速度很不一样.

在求极限时，我们还会遇到 $\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，0^0，1^∞，∞^0 等形式的未定型，一般是先通过恒等变换等措施，将其变换为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再使用洛必达法则求出极限.

例 16　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x(0\cdot\infty)$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{2}=0.$

例 17　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)(\infty-\infty)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2}=0.$

例 18　求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x(0^0)$.

解　将它变形为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$.

由于
$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}x=0,$$
故
$$\lim_{x\to0^+}x^x=e^0=1.$$

例 19　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

解　当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+2x)\sim2x$，

故
$$\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

注　洛必达法则虽然是求未定式的一种有效方法，但若能与其他求极限的方法结合使用，效果则更好. 例如，能化简时应尽可能先化简，可以应用等价无穷小替换或重要极限时应尽可能应用，以使运算尽可能简捷.

例 20　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解　所求极限属于$\dfrac{0}{0}$型未定式. 分子、分母分别求导数后，将化为
$$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$
此式无极限，故洛必达法则失效，不能使用. 但原极限是存在的，可用下面的方法求得.
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$

习题 2-4

1. 罗尔定理对下列函数是否成立？

(1) $f(x)=\ln(\sin x)$，$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$；

(2) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$，$[-1,1]$；

(3) $f(x)=x\sqrt{3-x}$，$[0,3]$.

2. 下列函数在给定区间上是否满足拉格朗日定理的所有条件？如满足，求出定理中的ξ.

(1) $f(x)=2x^3$，$[-1,1]$；

(2) $f(x)=\arctan x$，$[0,1]$；

(3) $f(x)=x^3+2x^2+x-2$，$[-1,0]$.

3. 试对下列函数写出柯西公式$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，并求$\xi$.

（1）$f(x)=x^2$，$F(x)=\sqrt{x}$，$[1,4]$；

（2）$f(x)=\sin x$，$F(x)=\cos x$，$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. 已知函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，不求$f(x)$的导数，讨论方程$f'(x)=0$的实根数量并指出它们所在的区间.

5. 试用拉格朗日中值定理证明：

（1）若$0<b\leqslant a$，则$\dfrac{a-b}{a}\leqslant\ln\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a-b}{b}$；

（2）若$a>b>0$，$n>1$，则$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$；

（3）$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$；

（4）当$x>1$时，$e^x>ex$.

6. 若方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$有一个正根$x=x_0$，证明方程$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$必有一个小于$x_0$的正根.

7. 设函数$f(x)$在$[-2,2]$上连续，在$(-2,2)$内可导，且$f(-2)=f(2)=0$，$f(0)=2$，证明曲线段C：$y=f(x)\,(-2\leqslant x\leqslant 2)$上至少有一点处的切线平行于直线$x-2y+1=0$.

8. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$2\xi[f(a)-f(b)]=(a^2-b^2)f'(\xi)$.

9. 设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

10. 利用洛必达法则求极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2-5x}{x^3-4x^2+5x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$；

（6）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin 4x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\tan 2x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$；

（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^x-e^x+1}{6(e^x-1)\cdot e^x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$；

（12）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x}$；

（13）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{\pi-2\arctan x}$；

（14）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 2x)}$；

（15）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x^2}$；

（16）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(17) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

(18) $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x$；

(19) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$；

(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(21) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-2}\mathrm{e}^x$；

(22) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$；

(23) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$；

(24) $\lim\limits_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}$；

(25) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$；

(26) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$；

(27) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

(28) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

第五节　泰勒中值定理

[课前导读]

对一些较复杂的函数，为了便于研究，我们往往希望用一些简单的函数来近似表达. 比如，当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，即 $\sin x=x+o(x)$. 对于 $o(x)$，我们非常好奇，它究竟是 x 的几阶无穷小？能不能再精确一些？如果我们事先约定允许的误差范围，能不能找到对应的简单函数(比如多项式)，使得 $\sin x=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$？其中 $n\in\mathbf{Z}^+$. 如果这个多项式存在，那么这个多项式的系数和函数之间存在什么关系？这一节就来探讨这个问题. 此节内容可作为对导数要求较高的专业的选学内容.

一、多项式逼近函数

假设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，取一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达函数 $f(x)$，要求 $f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$.

假设 $P_n(x_0)=f(x_0)$，$P_n'(x_0)=f'(x_0)$，$P_n''(x_0)=f''(x_0)$，…，$P_n{}^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$. 则可按这些条件来确定多项式中的系数 a_0，a_1，…，a_n.

由 $P_n(x_0)=f(x_0)$ 得 $a_0=f(x_0)$；

对 $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ 求各阶导数，有

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

故

$$P_n'(x_0)=a_1=f'(x_0);$$

$$P_n''(x)=2a_2+2\cdot3a_3(x-x_2)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

故

$$P''_n(x_0)=2a_2=f''(x_0),$$

即

$$a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

因此,

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

下面的定理告诉我们，上述确定的多项式正是我们要找的 n 次多项式.

定理 1(泰勒中值定理)　设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 可以表示为 $(x-x_0)$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里 ξ 介于 x_0，x 之间.

* **证明**　记 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$，其中

$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，只要证明 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中 ξ 介于 x_0，x 之间即可.

由于 $P_n(x)$，$f(x)$ 在 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则 $R_n(x)$ 在 (a,b) 内也具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，且

$$R_n(x_0)=R'_n(x_0)=R''_n(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

函数 $R_n(x)$ 与 $(x-x_0)^n$ 在 $[x_0,x]$ 或 $[x,x_0]$ 上满足柯西中值定理条件，运用柯西中值定理得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-0}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}=\frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n},$$

其中 ξ_1 介于 x_0，x 之间.

再对 $R'_n(x)$，$(n+1)(x-x_0)^n$ 在 $[x_0,\xi_1]$ 或 $[\xi_1,x_0]$ 上运用柯西中值定理得

$$\frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R'_n(\xi_1)-R'_n(x_0)}{(n+1)[(\xi_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n]}=\frac{R''_n(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}},$$

其中 ξ_2 介于 x_0、ξ_1 之间.

依此类推，经过 $n+1$ 次，则得 $\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\dfrac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，其中 ξ 介于 x_0，ξ_n 之间，当然也介于 x_0，x 之间.

由于 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-P_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0=f^{(n+1)}(x)$，因此

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x_0, x 之间.

注　ξ 可写成 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, 其中 $0<\theta<1$.

我们称多项式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 按 $x-x_0$ 的幂展开的 n 次近似多项式. 称

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

为 $f(x)$ 按 $x-x_0$ 的幂展开到 n 次的**泰勒公式**, 称 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为**拉格朗日型余项**.

当取 $n=0$ 时, 泰勒公式为 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$, 其中 ξ 介于 x_0, x 之间, 即为拉格朗日中值定理. 因此可以说, 泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

若存在 $M>0$, 使 $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$, $x\in(a, b)$, 则

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

故

$$0\leqslant\left|\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|\to 0(x\to x_0),$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0,\text{ 即 } R_n(x)=o((x-x_0)^n),$$

从而

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

这样泰勒公式也可写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\ (x-x_0)^n,$$

这个公式也可称为带有皮亚诺型余项的泰勒公式.

注　对于带有皮亚诺型余项的泰勒公式的推导, 条件还可以减弱.

定理 2　若函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 n 阶的连续导数, 则当 $x\in(a, b)$ 时, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\ (x-x_0)^n.$$

* **证明**　由于带有拉格朗日型余项的泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

其中 ξ 介于 x_0，x 之间.

由于 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续，故 $f^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(x_0)+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，因此，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n.$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{n!}=0$，得 $\dfrac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$，因此

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

在泰勒公式中若取 $x_0=0$，则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$，称为麦克劳林公式.

由此可得近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

其误差为 $|R_n(x)|\leqslant\dfrac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$（若存在 $M>0$，使 $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$）.

二、麦克劳林公式

例 1　写出函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解　由 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$，得 $f^{(n)}(0)=\mathrm{e}^0=1$，$n=1,2,\cdots$. 又 $f^{(n+1)}(\theta x)=\mathrm{e}^{\theta x}$，得

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$.

注　近似公式

$$\mathrm{e}^x\approx1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\quad |R_n(x)|\leqslant\frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!}|x|^{n+1};$$

特别地取 $x=1$，则有 $\mathrm{e}\approx1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$，$|R_n|\leqslant\dfrac{3}{(n+1)!}$.

例 2　证明 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

证明　取 $f(x)=\ln(1+x)$，$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$，$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$，$n=1$，2，…，因此

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

例 3　证明 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$,

其中

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}(0<\theta<1).$$

证明　取 $f(x)=\sin x$, $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, 则 $f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$且 $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)$依次循环取四个数 1, 0, −1, 0. 因此

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x),$$

其中 $R_{2m}(x)=\frac{\sin\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}(0<\theta<1)$.

同理, $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{\cos[\theta x+(m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m}$.

几个常用初等函数的带拉格朗日型余项或皮亚诺型余项的麦克劳林公式:(其中 $0<\theta<1$).

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{\sin\left[\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1};$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{\cos[\theta x+(n+1)\pi]}{(2n+2)!}x^{2n+2};$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1});$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n);$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdot\cdots\cdot(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^{n+1})(a\in\mathbf{R}).$$

三、泰勒公式的应用

在实际应用中, 上述已知初等函数的麦克劳林公式常用于间接地展开一些更复杂的函数的麦克劳林公式, 以及求某些函数的极限等.

例 4　写出函数 $f(x)=x^3\ln x$ 在 $x=1$ 处带有拉格朗日型余项的四阶泰勒公式.

解　$f(x)=x^3\ln x$,　　$f(1)=0$,

$f'(x)=3x^2\ln x+x^2$,　　$f'(1)=1$,

$f''(x)=6x\ln x+5x$,　　$f''(1)=5$,

$$f'''(x)=6\ln x+11,\qquad f'''(1)=11,$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{6}{x},\qquad f^{(4)}(1)=6,$$

$$f^{(5)}(x)=-\frac{6}{x^2},\qquad f^{(5)}(\xi)=-\frac{6}{\xi^2}.$$

于是

$$x^3\ln x=(x-1)+\frac{5}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4-\frac{6}{5!\ \xi^2}(x-1)^5,$$

其中 ξ 在 1 与 x 之间.

例 5　求 $y=\dfrac{1}{3-x}$ 在 $x=1$ 处带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒展开式.

解　$y=\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{2-(x-1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[1+\frac{x-1}{2}+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x-1}{2}\right)^n+o\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2^2}+\frac{(x-1)^2}{2^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}+o[(x-1)^n].$$

例 6　求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ 的带有皮亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解　因为

$$\mathrm{e}^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}+o(x^{n-1}),$$

所以

$$x\mathrm{e}^{-x}=x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}+o(x^n).$$

例 7　利用带有皮亚诺型余项的麦克劳林展开式计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解　因为 $\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$，$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$，

所以

$$\mathrm{e}^{x^2}+2\cos x-3=\left(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x\right)+o(x^4),$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}.$$

习题 2–5

1. 设多项式 $p(x)=x^6-2x^2-x+3$，

（1）将 $p(x)$ 按 $(x-1)$ 的乘幂展开；

（2）将 $p(x)$ 按 $(x+1)$ 的乘幂展开.

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

3. 利用带有皮亚诺型余项的麦克劳林公式求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$.

4. 试确定常数 a 和 b，使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

5. 用泰勒公式验证：当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，若按公式 $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，所产生误差小于 0.01，并求 $\sqrt{e}$ 的近似值，使误差小于 0.01.

6. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数，且 $f''(x)>0$，证明：对于 (a,b) 内任意两点 x_1，x_2，恒有 $\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$（提示：令 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，分别将 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 用 x_0 处的一阶泰勒公式来表示）.

第六节　函数的性态与图形

[课前导读]

我们已经会用初等数学的方法研究一些函数的单调性和某些简单函数的性质，但这些方法使用范围狭小，有些需要借助某些特殊的技巧，因而不具有一般性. 本节将以导数为工具，介绍判断函数单调性和凹凸性的简便且具有一般性的方法.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(见图 2–24)；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少(见图 2–25). 单调增加或单调减少的函数统称**单调函数**.

有时我们还需要研究曲线的弯曲方向，如果曲线上任意弧段位于所张弦的下方，这样的曲线称为**凹弧**(见图 2–26)；如果曲线上任意弧段位于所张弦的上方，这样的曲线称为**凸弧**(见图 2–27).

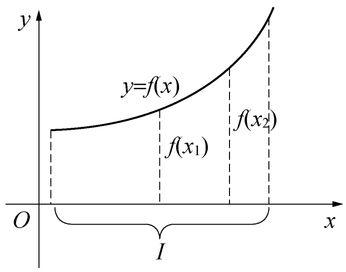


图 2-24

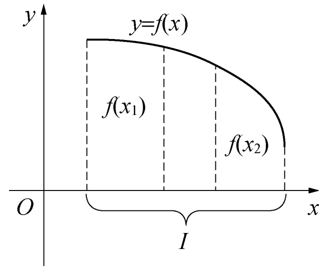


图 2-25

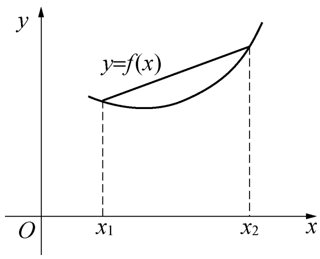


图 2-26

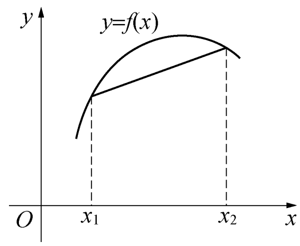


图 2-27

一、函数单调性的判别

先从函数图形来观察单调函数有什么特点.

由图 2-28 可知，(1) 曲线沿 x 轴正向上升；(2) 曲线的切线的斜率均非负，即 $f'(x)\geqslant 0$；

由图 2-29 可知，(1) 曲线沿 x 轴正向下降；(2) 曲线的切线的斜率均非正，即 $f'(x)\leqslant 0$.

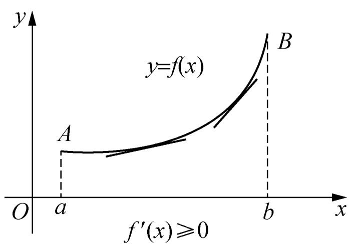


图 2-28

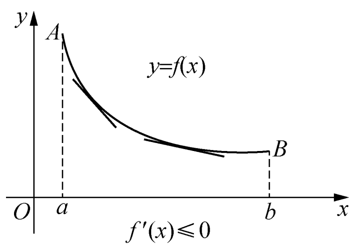


图 2-29

函数单调性的判别

因此可得到，函数的单调性与函数的导数符号之间有着密切的关系. 能否用一个区间上的导数符号来判定函数在该区间上的单调性呢？

拉格朗日中值定理建立了函数与导数之间的联系，利用中值定理可以得出函数单调性的判别法.

定理 1(单调性的判别法)　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，且在 I 内可导，若在 I 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上单调增加；若在 I 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

证明　任取 $x_1, x_2\in I$，不妨设 $x_1<x_2$，$f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\text{，其中 }\xi\in(x_1, x_2).$$

因此，若在 I 内 $f'(x)>0$，则 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即在区间 I 上 $f(x)$ 单调增加；

若在 I 内 $f'(x)<0$，则 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即在区间 I 上 $f(x)$ 单调减少.

例 1　讨论函数 $y=\arctan x-x$ 的单调性.

解　$y'=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内，除 $x=0$ 时 $y'=0$ 外，恒有 $\frac{x^2}{1+x^2}>0$，所以在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内恒有 $y'<0$，因此 $y=\arctan x-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调减少的（见图 2-30）.

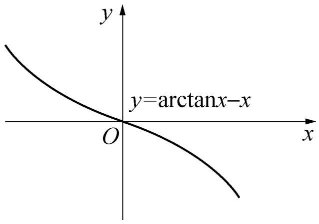


图 2-30

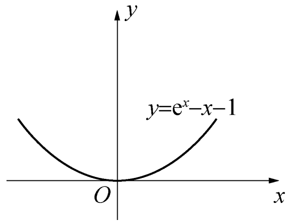


图 2-31

例 2　讨论函数 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调性.

解　$y'=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$y'<0$，即函数 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$y'>0$，即函数 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调增加（见图 2-31）. 其中 $x=0$ 是函数 $y=e^x-x-1$ 的单调区间 $(-\infty,0]$，$[0,+\infty)$ 的分界点.

注　当 $x=0$ 时，$y'=0$，也可以看出使 $y'=0$ 的点可能是划分函数单调区间的分界点，它使原来在定义域内不单调的函数在各个部分区间内是单调的.

下面讨论一下如何划分一个函数的单调区间. 哪些点可能成为单调区间的分界点？使 $y'=0$ 的点、导数不存在的点、函数不连续的点都可能成为单调区间的分界点. 由此划分函数的单调区间可分下列步骤：

（1）找出函数的不连续点；

（2）求导数，找出使 $f'(x)=0$ 及导数不存在的点；

（3）确定各个分划区间内导数的符号，由此得到函数的单调区间.

例 3　讨论函数 $y=\ln(1-x^2)$ 的单调性.

解　函数的定义域为 $(-1,1)$，$y'=-\frac{2x}{1-x^2}$.

令 $y'=0$，则有 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$y'>0$，

故 $\ln(1-x^2)$ 在 $(-1,0)$ 上单调增加；

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，

故 $\ln(1-x^2)$ 在 $[0,1)$ 上单调减少（见图 2-32）.

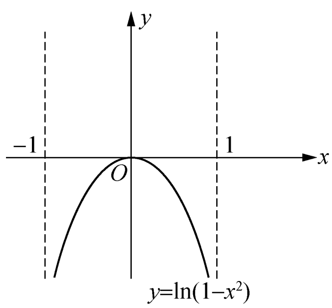


图 2-32

例 4　判定函数 $y=x^3-3x^2-9x+14$ 的单调区间.

解　$y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$，

故　$x_1=-1$，$x_2=3$ 使 $y'=0$. 用这两点把定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成区间 $(-\infty,-1)$，$(-1,3)$ 及 $(3,+\infty)$，其讨论结果列表如下：

区间	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	+	−	+
y	↗	↘	↗

所以，函数在$(-\infty, -1)$和$(3, +\infty)$内单调增加，在$(-1, 3)$内单调减少(见图 2-33).

由这些例子可以看到，函数$f(x)$单调区间分界点是$f'(x)=0$的点，而$f'(x)$不存在的点也可能是单调区间的分界点.

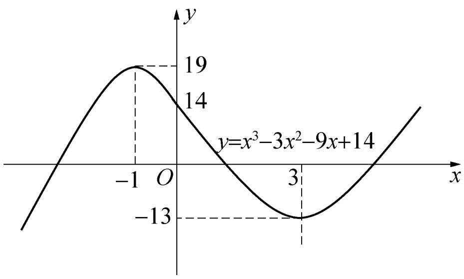


图 2-33

例 5　函数$y=|x|$在$x=0$处导数不存在，显然函数在$(-\infty, 0)$内单调减少，在$(0, +\infty)$内单调增加(见图 2-34).

例 6　函数$y=\begin{cases}1+x, & x\in[-1, 0),\\ 1-x, & x\in[0, 1]\end{cases}$在$x=0$处导数不存在，而$x=0$也是单调区间的一个分界点. 事实上，该函数在$[-1, 0)$内单调增加，在$[0, 1]$内单调减少(见图2-35).

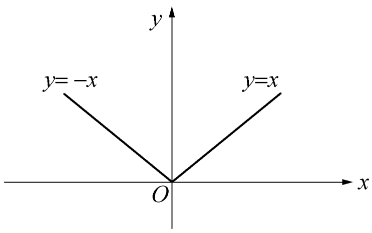


图 2-34

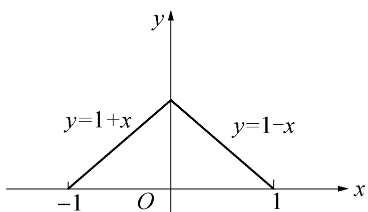


图 2-35

单调性可以用来证明不等式.

例 7　试证明当$x>1$时，有$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

证明　考虑函数$f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$，只要证$f(x)>0(x>1)$即可.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x^2}.$$

当$x>1$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$严格单调增加. 而$f(1)=0$，因此，当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，即当$x>1$时，$2\sqrt{x}-\left(3-\dfrac{1}{x}\right)>0$，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

例 8　证明方程 $x^5+x+1=0$ 在区间$(-1,\ 0)$内有且只有一个实根.

证明　令 $f(x)=x^5+x+1$，因 $f(x)$ 在闭区间$[-1,\ 0]$上连续，且 $f(-1)=-1<0$，$f(0)=1>0$，根据零点定理，$f(x)$ 在$(-1,\ 0)$内至少有一个零点.

另一方面，对于任意实数 x，有 $f'(x)=5x^4+1>0$，所以 $f(x)$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内单调增加，因此曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至多有一个交点.

综上所述，可知方程 $x^5+x+1=0$ 在区间$(-1,\ 0)$内有且只有一个实根.

二、函数的极值及其求法

定义 1　设函数 $f(x)$ 在$(a,\ b)$内有定义，$x_0\in(a,\ b)$，如果存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$时，恒有$f(x)<f(x_0)$（或$f(x)>f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值**（或**极小值**），x_0 称为 $f(x)$ **的极大值点**（或**极小值点**）.

函数的极大值、极小值统称为**极值**，使函数取得极值的点称为**极值点**.

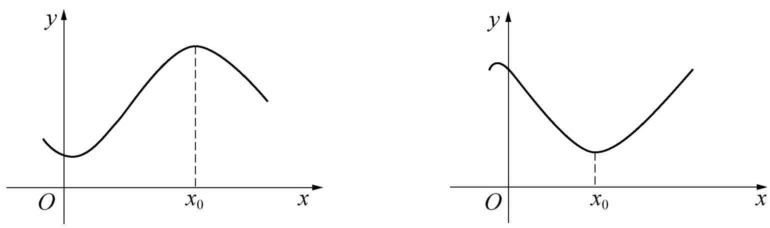


图 2-36

下面先考虑函数可导的情况下的极值的求法.

定理 2（极值的必要条件）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在点 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

证明　不妨设 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值. 由定义知，存在点 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$时，恒有 $f(x)>f(x_0)$，故

当 $x<x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，因此 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$；

当 $x>x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，因此 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0$.

使 $f'(x)=0$ 的实根 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点.

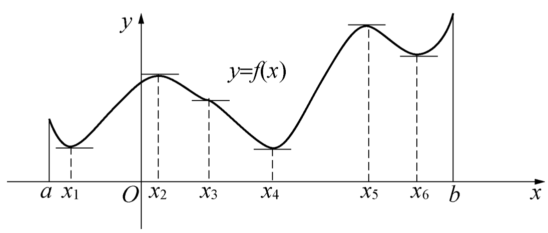


图 2-37

由此可得，若函数$f(x)$在点x_0处可导，x_0是极值点，则x_0必是驻点. 反之不然，例如$y=x^3$在$x=0$处有$y'=0$，但$x=0$并不是极值点. 极值点必是驻点的前题是函数在该点处可导，例如$y=|x|$在$x=0$处有极小值，但该点(不可导)不是驻点.

定理3(极值第一充分条件)　设函数$f(x)$在x_0的邻域$U(x_0)$内连续，在$\mathring{U}(x_0)$内可导.

(1) 如果x在x_0的左邻域内有$f'(x)>0$，在x_0的右邻域内有$f'(x)<0$，则$f(x)$在点x_0处取得极大值(见图2-38)；

(2) 如果x在x_0的左邻域内有$f'(x)<0$，在x_0的右邻域内有$f'(x)>0$，则$f(x)$在点x_0处取得极小值(见图2-39)；

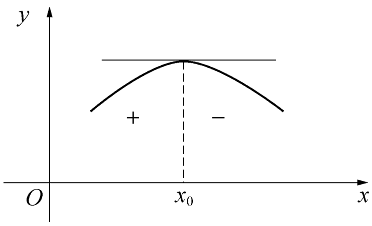


图2-38

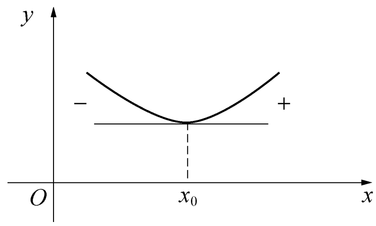


图2-39

(3) 如果$x\in\mathring{U}(x_0)$，$f'(x)$恒正或恒负，则函数$f(x)$在点x_0处无极值(见图2-40).

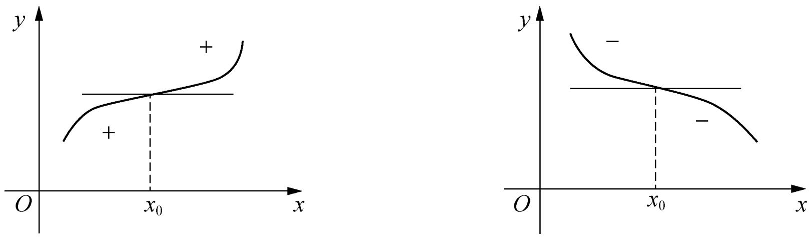


图2-40

证明　(1) 如果x在x_0的左邻域内有$f'(x)>0$，在x_0的右邻域内有$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0的左邻域内单调增加，在x_0的右邻域内单调减少，即当$x\in\mathring{U}(x_0)$时，恒有$f(x)<f(x_0)$，因此$f(x)$在点x_0处取得极大值.

(2)、(3)同理可证.

由定理3可得下列求极值的步骤：

(1) 求导数$f'(x)$；

(2) 找出所有驻点和不可导的点；

(3) 在这些点的两侧确定$f'(x)$的符号；

(4) 确定极值点，求出极值.

例9　求出函数$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$的单调区间和极值.

解　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，令$f'(x)=0$，得$x_1=-1$，$x_2=3$，如表2-1所示，可得$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-1)$和$(3,+\infty)$，单调减区间为$(-1,3)$；

$f(x)$在$x=-1$处取得极大值$f(-1)=10$；在$x=3$处取得极小值$f(3)=-22$. 图形如图2-41所示.

表 2-1

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f(-1)=10$	↘	$f(3)=-22$	↗

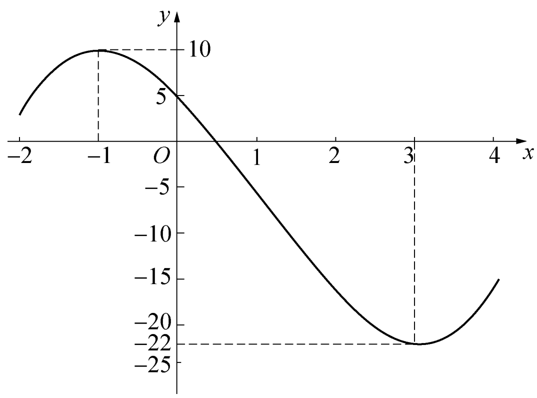


图 2-41

例 10　求函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解　$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 当 $x\neq 2$ 时，

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}};$$

当 $x=2$ 时，$f'(x)$ 不存在.

在 $(-\infty, 2)$ 内，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调增加；在 $(2, +\infty)$ 内，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调减少. 因此 $f(2)=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值. 函数的图形如图 2-42 所示.

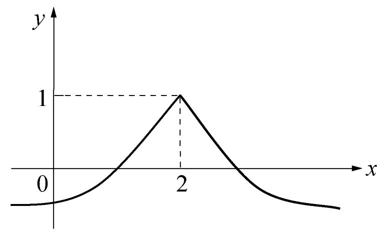


图 2-42

定理 4（极值第二充分条件）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

证明　若 $f''(x_0)<0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$，则存在 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 因此，当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$. 故函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值. 同理可证 $f''(x_0)>0$ 时的情形.

注　条件 $f''(x_0)\neq 0$ 不可缺.

如取 $f_1(x)=-x^4$，$f_2(x)=x^4$，$f_3(x)=x^3$，显然 $f'_1(0)=f'_2(0)=f'_3(0)=0$，且 $f''_1(0)=f''_2(0)=f''_3(0)=0$，可以看出 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，$f_2(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，$f_3(x)$ 在 $x=0$ 处无极值（见图 2-43）.

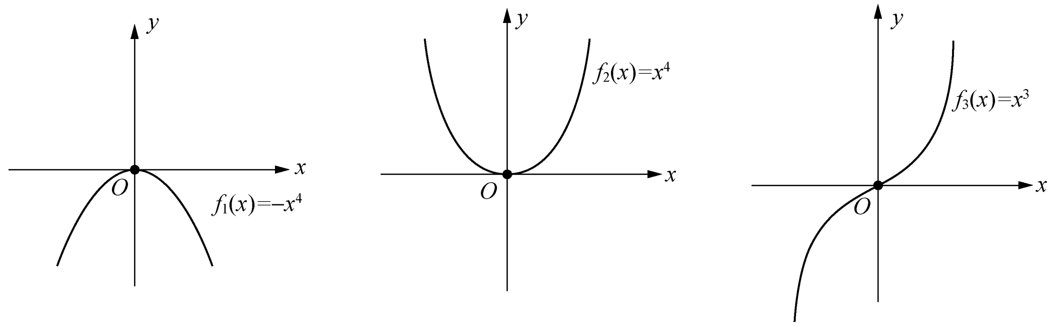


图 2-43

例 11　求函数 $f(x)=e^x\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的极值.

解　$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，$f''(x)=-2e^x\sin x$.

令 $f'(x)=0$，因为 $e^x>0$，故 $\cos x-\sin x=0$，得驻点

$$x=\frac{\pi}{4}\text{及 } x=\frac{5\pi}{4}.$$

又

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)<0,\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)>0,$$

故在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处取得极大值 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$；在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 处取极小值 $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}}$.

在判定驻点 x_0 是否为极值点时，若在驻点 x_0 处 $f''(x_0)=0$，则第二充分条件失效. 此时仍需用第一充分条件.

例 12　求函数 $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$ 的极值.

解　$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$,

$f''(x)=12(3x^2-4x+1)=12x(3x-1)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x=0$，$x=1$，得 $f''(0)=12>0$，$f''(1)=0$.

由第二充分条件知，$f(0)=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

因为 $f''(0)=0$，需用第一充分条件判定驻点的情形. 在 $x=1$ 的两侧，由于当 $0<x<1$ 及 $x>1$ 时皆有 $f'(x)>0$，故 $x=1$ 不是极值点.

三、曲线的凹凸性与拐点

研究了函数的单调性与极值后，对函数的变化情况有了一定的了解，对描述函数的图形有很大的帮助. 但仅仅如此还不够，比如图 2-44 中的曲线弧 $\overset{\frown}{ABC}$ 整体是单调上升的，但是弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 是凸的，而弧段 $\overset{\frown}{BC}$ 是凹的，所以不仅要考虑增减性，还需要研究曲线的弯曲方向，下面给出曲线的凹凸性的定义.

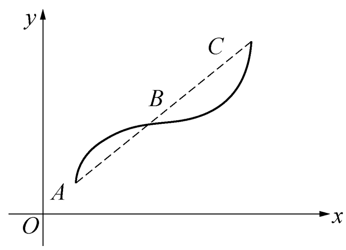


图 2-44

定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对区间 I 上的任意两点 x_1、x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 的图形（曲线 $y=f(x)$）是**凹的（或凹弧）**（见图 2-45）；

如果对区间 I 上的任意两点 x_1、x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 的图形（曲线 $y=f(x)$）是**凸的（或凸弧）**（见图 2-46）.

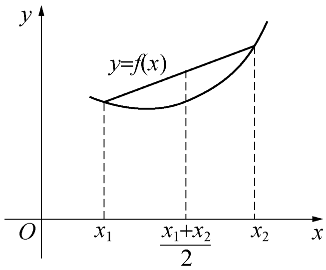


图 2-45

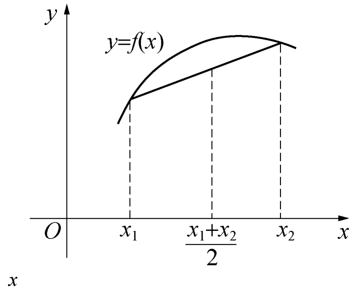


图 2-46

如何确定函数图形的凹凸性呢？

从以下两图可以看出，随着横坐标 x 的增加，凹弧上各点处的切线斜率逐渐增大，即 $f'(x)$ 是单调增加的（见图 2-47）；而凸弧上各点处的切线斜率逐渐减小，即 $f'(x)$ 是单调减少的（见图 2-48）. 对于 $f'(x)$ 的增减性，可由 $f'(x)$ 的导数，即 $f''(x)$ 来判定.

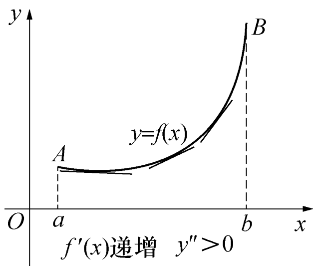


图 2-47

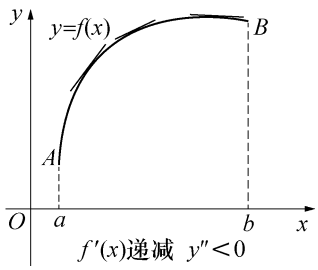


图 2-48

如果函数具有二阶导数，就可利用二阶导数的符号来确定函数图形的凹凸性.

定理 5　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内具有一阶及二阶导数，则

（1）若在 I 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的；

（2）若在 I 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

例 13　判断曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的凹凸性.

解　$y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，$y'=\mathrm{e}^x$，$y''=\mathrm{e}^x>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，因此曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的（见图 2-49）.

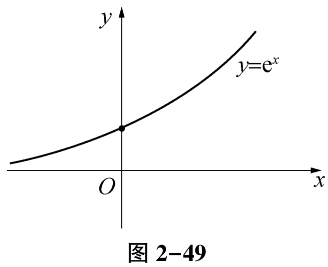


图 2-49

例 14　判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解　$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，$y'=3x^2$，$y''=6x$.

当 $x\in(-\infty,0]$时，$y''<0$，故曲线 $y=x^3$ 在$(-\infty,0]$上是凸的；当 $x\in[0,+\infty)$时，$y''>0$，故曲线 $y=x^3$ 在$[0,+\infty)$上是凹的(见图2-50).

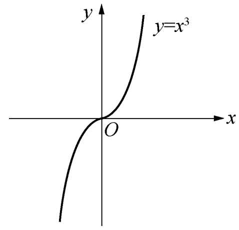


图 2-50

注　点(0, 0)为凹弧与凸弧的分界点.

连续曲线 $y=f(x)$上凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的**拐点**.

判断曲线 $y=f(x)$的凹凸性与求拐点的一般步骤如下.

(1) 求出$f''(x)$；

(2) 找出方程$f''(x)=0$ 的实根；

(3) $f''(x)=0$ 的实根将函数 $y=f(x)$的定义域分为若干区间，在每个区间上确定$f''(x)$的符号，从而确定曲线 $y=f(x)$的凹凸区间；

(4) 若在$f''(x)=0$ 的实根 x_0 的两侧，$f''(x)$的符号相反，则$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

例 15　指出曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹凸区间.

解　$y=3x^4-4x^3+1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$y'=12x^3-12x^2$，

$y''=12(3x^2-2x)=12x(3x-2)=36x\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$.

令 $y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2}{3}$.

表 2-2

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$	$\dfrac{2}{3}$	$\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	凹弧	拐点(0, 1)	凸弧	拐点$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27}\right)$	凹弧

因此，曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点为(0, 1)、$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27}\right)$；

凹区间为$(-\infty,0)$、$\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$；凸区间为$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$(见图 2-51).

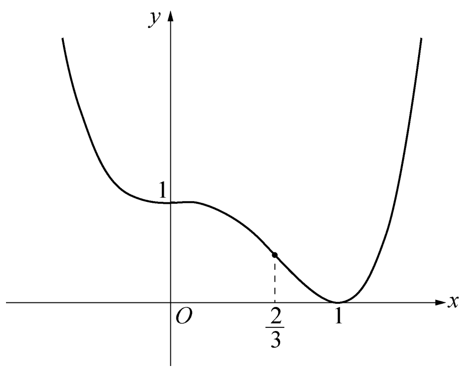


图 2-51

例 16　证明曲线 $y=x^4$ 没有拐点.

证明　$y=x^4$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$y'=4x^3$，$y''=12x^2$. 当 $x=0$ 时，$y''=0$，而当 $x\neq0$ 时，$y''>0$，因此曲线 $y=x^4$ 在$(-\infty,+\infty)$内是凹的，点$(0,0)$并不是拐点(见图 2-52).

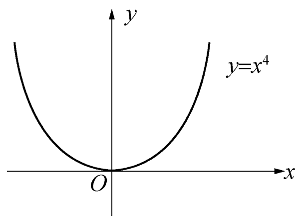


图 2-52

注　从本例也可看出，使 $y''=0$ 的点未必是拐点. 而从下例可以看出，导数不存在的点也有可能是拐点.

例 17　求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$的拐点.

解　该函数在定义区间$(-\infty,+\infty)$内连续，当 $x\neq0$ 时，

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ y''=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

当 $x=0$ 时，y'、y''都不存在，故二阶导数在$(-\infty,+\infty)$内没有零点. $x=0$是 y''不存在的点，它把$(-\infty,+\infty)$分成两个部分区间：$(-\infty,0)$，$[0,+\infty)$. 在$(-\infty,0)$内，$y''>0$，这部分曲线在$(-\infty,0)$上是凹的；在$(0,+\infty)$内，$y''<0$，这部分曲线在$[0,+\infty)$上是凸的. $x=0$ 时，$y=0$，点$(0,0)$是该曲线的一个拐点(见图 2-53).

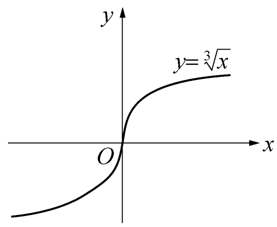


图 2-53

四、曲线的渐近线

在平面上，当曲线伸向无穷远处时，一般很难把它画准确. 但如果曲线伸向无穷远处，且能渐渐靠近一条直线，那么就可以既快又好地画出趋于无穷远处这条曲线的走向趋势.

例如，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，当 $x\to\infty$ 时就渐渐靠近两条直线(见图 2-54)：$y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$.

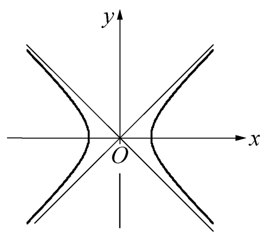


图 2-54

对于一般的曲线，有时也能找到这样的直线.

例如，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 表明当$|x|$无限增大时，对应的函数值 $f(x)$与数值 A 无限接近. 几何上描述为：当曲线 $y=f(x)$沿 x 轴正、负向伸展到无穷远时，曲线上的点与直线 $y=A$ 上的点无限接近，也就是直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$的水平渐近线(见图 2-55).

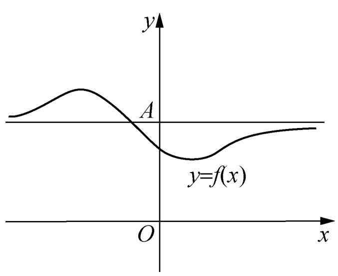


图 2-55

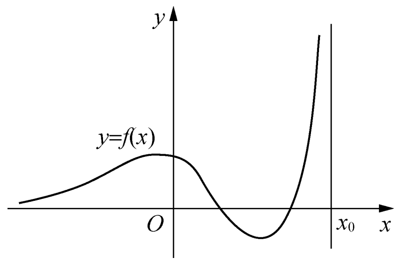


图 2-56

同理，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则直线 $y=A$ 也是曲线 $y=f(x)$的水平渐近线. 与

以上不同的是，这时的渐近线仅仅限于曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 的一侧或 $x\to-\infty$ 的一侧.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 表明当 x 充分接近 x_0 时，函数值 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大. 几何上描述为：当 x 接近 x_0 时，曲线 $y=f(x)$ 要伸展到无穷远，也就是直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线(见图 2-56).

同理，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 也是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线. 与以上不同的是，这时渐近线仅仅限于曲线 $y=f(x)$ 在 $x>x_0$ 的一侧或 $x<x_0$ 的一侧.

例如，曲线 $y=\ln x$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以直线 $x=0$ 是曲线 $y=\ln x$ 的铅直渐近线(见图 2-57).

曲线 $y=e^x$，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，所以直线 $y=0$ 是曲线 $y=e^x$ 的水平渐近线(见图 2-58).

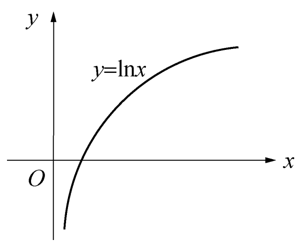


图 2-57

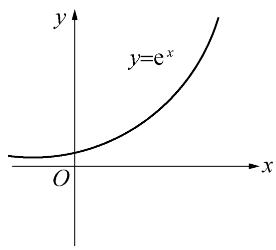


图 2-58

例 18　求曲线 $y=\dfrac{e^x}{x^2-1}$ 的渐近线.

解　$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2-1}=0$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x}{x^2-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^x}{x^2-1}=\infty$.

故直线 $y=0$ 是水平渐近线，直线 $x=1$ 及 $x=-1$ 是两条铅直渐近线.

五、函数图形的描绘

对于一个函数，若能作出其图形，就能从直观上了解该函数的性态特征，并可从其图形清楚地看出因变量与自变量之间的相互依赖关系. 在中学阶段，我们利用描点法作函数的图形. 这种方法常会遗漏曲线的一些关键点，如极值点、拐点等，使得曲线的单调性、凹凸性等函数的一些重要性态难以准确显示出来. 本节我们要利用导数描绘函数 $y=f(x)$ 的图形，其一般步骤如下.

第一步　确定函数 $f(x)$ 的定义域，研究函数特性，如奇偶性、周期性、有界性等，求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

第二步　求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点以及导数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数定义域划分成若干个部分区间；

第三步　确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性和凹凸性、极值点和拐点；

第四步　确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；

第五步　算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值，并在坐标平面上定出图形上相应的点；有时还需适当补充一些辅助作图点(如与坐标轴的交点和曲线的端点等)；然后根据第三步、第四步中得到的结果，用平滑曲线联接而画出函数的图形.

例 19　作函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解　定义域为 $(-\infty, +\infty)$，无奇偶性及周期性.

$f'(x)=(3x+1)(x-1)$，$f''(x)=2(3x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=1$. 令 $f''(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{3}$.

列表，如表 2-3 所示。

表 2-3

x	$\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$	$-\dfrac{1}{3}$	$\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$	$\dfrac{1}{3}$	$\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f''(x)$	−		−		+		+
$f(x)$	↗	极大值 $\dfrac{32}{27}$	↘	拐点 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$	↘	极小值 0	↗

补充点：$A(-1, 0)$，$B(0, 1)$，$C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{8}\right)$. 综合作出图形，如图 2-59 所示.

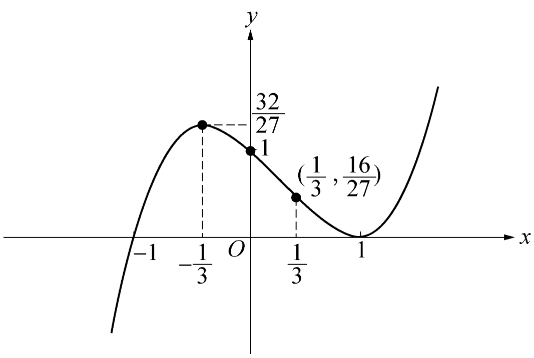


图 2-59

例 20　作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解　D：$\{x|x\neq 0\}$，非奇非偶函数，且无对称性.

$$f'(x)=-\frac{4(x+2)}{x^3},\ f''(x)=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-2$；令 $f''(x)=0$，得 $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2$，得水平渐近线 $y=-2$；

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=+\infty$，得铅直渐近线 $x=0$.

列表，如表 2-4 所示。

表 2-4

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	↘	拐点$\left(-3, \frac{26}{9}\right)$	↘	极值点	↗	间断点	↘

补充点：$(1-\sqrt{3}, 0)$，$(1+\sqrt{3}, 0)$；$A(-1, -2)$，$B(1, 6)$，$C(2, 1)$. 作出图形，如图 2-60所示.

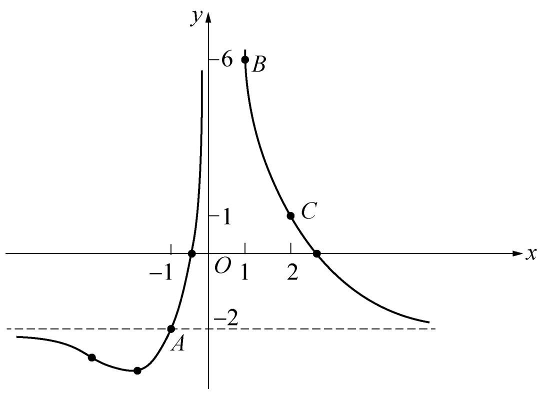


图 2-60

习题 2-6

1. 确定下列函数的单调区间：

（1）$y=2+x-x^2$；　　（2）$y=\dfrac{2x}{1+x^2}$；

（3）$y=2x+\dfrac{8}{x}(x>0)$；　　（4）$y=2x^2-\ln x$；

（5）$y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}(x\geqslant 0)$；　　（6）$y=x+\sin x$；

（7）$f(x)=x-\arctan x$；　　（8）$y=x^2-\ln x^2$.

2. 试证明下列不等式：

（1）当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

（2）当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$；

（3）当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x+\tan x>2x$；

（4）当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$；

（5）当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$；

（6）当 $x\geqslant 0$ 时，$\arctan x\leqslant x$.

3. 求下列函数的极值：

（1）$y=2x^3-6x^2-18x+7$；　　（2）$y=x^2\ln x$；

（3）$y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$；　　（4）$y=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$；

（5）$y=x+\dfrac{1}{x}$；　　（6）$y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$；

（7）$y=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$；　　（8）$y=2x-\ln(4x)^2$.

4. 讨论方程 $\ln x=ax$（其中 $a>0$）有几个实根.

5. 证明方程 $x^3+5x-2=0$ 只有一个正根.

6. 试问：a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极值？它是极小值还是极大值？

7. 若函数 $f(x)$ 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$，并且当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，否则 $f'(x)>0(x\neq2)$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$时，$f''(x)>0$，否则$f''(x)<0(x\neq0)$，则

（1）函数$f(x)$的单调区间（注明增减）是________.

（2）函数曲线的凹区间________、凸区间________和拐点是________.

（3）当 $x=$________时，函数取得极大值________.

（4）函数的渐近线有________.

8. 判断下列曲线的凹凸性：

（1）$y=4x-x^2$；　　（2）$y=x\arctan x$.

9. 求下列曲线的拐点及凹、凸区间：

（1）$y=x^3-5x^2+3x+5$；　　（2）$y=\ln(x^2+1)$.

10. 求函数 $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$图形的拐点及凹或凸的区间.

11. 求函数 $y=x^4(12\ln x-7)$图形的拐点及凹或凸的区间.

12. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a、b、c、d，使得曲线在 $x=-2$ 所对应的点处有水平切线，$(1,-10)$为曲线的拐点，且点$(-2,44)$在曲线上.

13. 求曲线 $x=t^2$，$y=3t+t^3$ 的拐点.

14. 求下列曲线的渐近线：

（1）$y=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{(x+2)^3}$；

（3）$y=xe^{x^{-2}}$；　　（4）$y=-(x+1)+\sqrt{x^2+1}$；

（5）$y=x\sin\dfrac{1}{x}$；　　（6）$y=\dfrac{e^x}{x^2-1}$.

15. 作下列函数的图形：

（1）$y=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　（2）$y=xe^{-x}$；

（3）$y=x\sqrt{3-x}$；　　（4）$y=\sqrt[3]{x^2}+2$；

（5）$y=x^2+\dfrac{1}{x}$；　　（6）$y=\dfrac{3x}{(x+1)^2}-2$.

*16. 利用曲线的凹凸性证明不等式：$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$，其中 $x>0$，$y>0$ 且 $x\neq y$.

第七节　微分学的实际应用

［课前导读］

在实际工程中常会遇到这样一类问题：在一定条件下，怎样使“产品最多”“用料最省”“成本最低”“效率最高”……这类问题可归结为建立一个目标函数，求这个函数的最大值、最小值问题（设计最佳方案）. 该类问题的难点在于，如何利用已知的信息，建立既符合实际又易运算的函数（模型）.

一、最大值、最小值

极值的概念是局部性的，是描述函数在某一点邻域内的性态. 这一节研究函数在一个区间上的最大值、最小值问题. 由闭区间上连续函数的性质知，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定取得最大值和最小值.

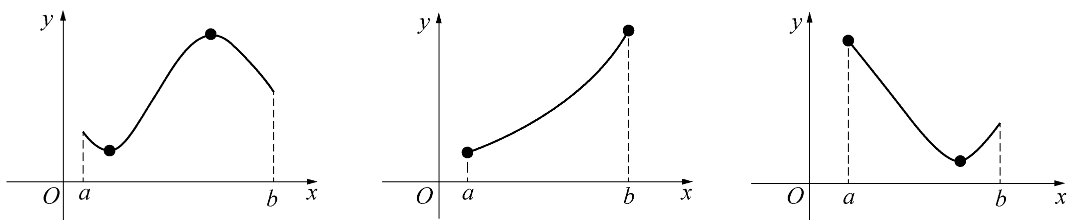


图 2-61

1. 函数在闭区间上的最大值与最小值

如何求出连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值呢？$f(x)$ 的最大值与最小值可以在区间 $[a, b]$ 的内部取得，也可以在区间端点 $x=a$ 或 $x=b$ 处取得. 若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内 x_0 处取得最大值（最小值），则 $f(x_0)$ 必是函数 $f(x)$ 的极大值（极小值）. $f'(x_0)$ 可能不存在，也可能存在. 若 $f'(x_0)$ 存在，则 x_0 必为 $f(x)$ 的驻点. 由此知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$

上的最大值与最小值必在 $f(x)$ 的驻点、导数不存在的点或区间端点处取得.

从数学的角度看问题，可以由下列过程求最大值和最小值.

(1) 找出 (a, b) 内所有驻点及不可导点 $x_i(i=1, 2, \cdots, m)$；

(2) 比较 $f(x_i)(i=1, 2, \cdots, m)$ 及 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小；

(3) 最大值 $M=\max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}$，

最小值 $m=\min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_m), f(a), f(b)\}$.

例 1　求函数 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.

解　由 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$.

令 $f'(x)=0$，解得函数在 $(-2, 2)$ 内的驻点为 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$. 在驻点的函数值为 $f(-1)=4$，$f(0)=5$，$f(1)=4$；在端点的函数值为 $f(-2)=f(2)=13$. 比较上述 5 个点的函数值，可得在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 $f(-2)=f(2)=13$，最小值为 $f(-1)=f(1)=4$.

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值.

解　由 $f'(x)=\dfrac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得函数在 $(0, 2)$ 内的驻点为 $x=1$. 在驻点的函数值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，在端点的函数值为 $f(0)=0$，$f(2)=\dfrac{2}{5}$，故在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，最小值为 $f(0)=0$.

2. 应用问题举例

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有唯一驻点，且此驻点为极大(小)值，则此极大(小)值必为最大(小)值.

例 3　由直线 $y=0$，$x=8$ 及抛物线 $y=x^2$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形面积最大.

解　设 $P(x_0, y_0)$ 为抛物线 $y=x^2$ 上任意一点，该点处的切线斜率 $k=2x_0$，过该点的切线为 $y-y_0=2x_0(x-x_0)$，即 $y=2x_0x-x_0^2$，则此切线与 x 轴的交点为 $A\left(\dfrac{x_0}{2}, 0\right)$，与直线 $x=8$ 的交点为 $B(0, 16x_0-x_0^2)$（见图 2-62）. 根据几何分析，所求三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\left(8-\frac{1}{2}x_0\right)(16x_0-x_0^2)\ (0\leqslant x_0\leqslant 8).$$

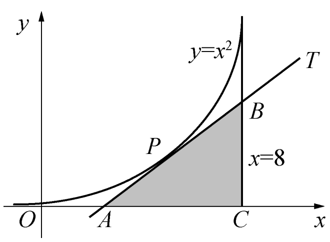


图 2-62

由 $S'=\dfrac{1}{4}(3x_0^2-64x_0+16\cdot 16)=0$，解得区间 $(0, 8)$ 内的唯一驻点 $x_0=\dfrac{16}{3}$.

因为 $S''\left(\dfrac{16}{3}\right)=-8<0$，所以 $S\left(\dfrac{16}{3}\right)=\dfrac{4\ 096}{27}$ 为极大值.

故 $x_0=\dfrac{16}{3}$ 时所围成的三角形面积最大.

在很多实际问题中，上述求最大值、最小值的方法还可进一步简化. 如果根据问题的性质，我们可以断定可导函数 $f(x)$ 确有最大值(或最小值)，而且该最大值(或最小值)一定在定义区间的内部取得. 这时，如果方程 $f'(x)=0$ 在定义区间内部只有一个根 x_0(函数 $f(x)$ 在定义区间内部只有唯一驻点 x_0)，那么不必讨论 $f(x_0)$ 是否是极值，就可以断定 $f(x_0)$ 必为所求的最大值(或最小值).

例 4　某工厂需要围建一个面积为 512 m^2 的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁. 问：堆料场的长和宽各为多少时，才能使砌墙所用的材料最省？

解　要求原料最省，就是要求新砌的墙壁总长度最短. 如图 2-63 所示，设场地的宽为 x m，为使场地面积等于 512 m^2，则长为 $\dfrac{512}{x}$ m. 因此新墙的总长度为 $l=2x+\dfrac{512}{x}$ $(x>0)$，这就是目标函数. 下面讨论 x 为何值时，l 取得最小值. 为此，求 l 对 x 的导数 $l'=2-\dfrac{512}{x^2}$. 解方程 $l'=0$，得 $x=16$.

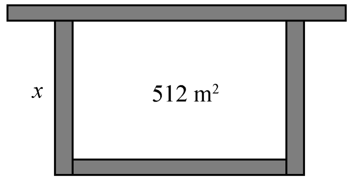


图 2-63

目标函数在区间 $(0,+\infty)$ 内只有一个驻点 $x=16$，故当 $x=16$ 时，l 取得极小值，从而这个极小值也是目标函数在区间 $(0,+\infty)$ 内的最小值. 因此，当堆料场的宽为 16 m、长为 $\dfrac{512}{16}=32$ m 时，可以使砌墙所用的材料最省.

例 5　某房地产公司有 50 套公寓要出租，当租金定为每月 180 元时，公寓会全部租出去. 当租金每月增加 10 元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费 20 元的整修维护费. 试问：房租定为多少可获得最高收入？

解　设房租为每月 x 元，租出去的房子有 $50-\left(\dfrac{x-180}{10}\right)$ 套，每月总收入为

$$R(x)=(x-20)\left(50-\frac{x-180}{10}\right)=(x-20)\left(68-\frac{x}{10}\right).$$

$R'(x)=\left(68-\dfrac{x}{10}\right)+(x-20)\left(-\dfrac{1}{10}\right)=70-\dfrac{x}{5}$. 解 $R'(x)=0$，得 $x=350$(唯一驻点).
故每月每套租金为 350 元时，收入最高. 最高收入为 $R(350)=10\,890$(元).

二、曲率

工程技术与生产实践中常常要考虑曲线的弯曲程度，如公路、铁路的弯道(见图 2-64)，机床与土木建筑中的轴或梁在荷载作用下产生的弯曲变形. 在设计时对它们的弯曲程度都有一定的限制，因此要讨论如何定量地描述曲线的弯曲程度. 这就引出了曲率的概念.


图 2-64

在介绍曲率之前，需要先引进弧微分的概念.

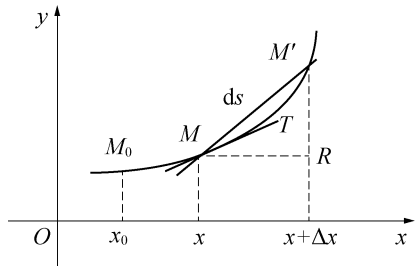
1. 弧微分的概念

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有一阶连续导

数，其图形为一条处处有切线的曲线，且切线随切点的移动而连续转动，通常这样的曲线必为光滑曲线.在曲线 $y=f(x)(x\in(a,b))$ 上取固定点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 作为度量弧长的基点，并规定：

（1）以 x 增大的方向作为曲线的正向；

（2）对曲线上任意点 $M(x,f(x))$，有向线段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的长度为 $s=|s|\operatorname{sgn}(x-x_0)$，称为弧 s.由此可知弧 s 是 x 的函数：$s=s(x)$，且它是单调增加的（见图 2-65）.



弧微分的几何解释

图 2-65

现在考虑 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta x}$. $\Delta s=\overset{\frown}{M_0M'}-\overset{\frown}{M_0M}=\overset{\frown}{MM'}$.

由 $$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right)^2\left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right)^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

得 $$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}=\pm\left|\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right|\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

由于当 $\Delta x\to 0$ 时，$M'\to M$，$\lim\limits_{M'\to M}\left|\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{\overline{MM'}}\right|=1$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2=y'^2$，注意到 $s=s(x)$ 单调增加，即 $y'\geqslant 0$，因此 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+y'^2}$.

由此可得弧微分公式为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

若曲线由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 给出，则有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t;$$

若曲线方程为极坐标形式 $r=r(\theta)$（极坐标系内容详见第三章第七节），则有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. 曲率及其计算公式

现在研究如何描述曲线弧的弯曲程度.

从几何直观上容易看出，直线不弯曲，抛物线在顶点处弯曲最厉害，当抛物线上的点越远离顶点，弯曲程度越低（见图 2-66）；圆上各点的弯曲程度是相同的（见图 2-67），半径越小，弯曲越厉害.

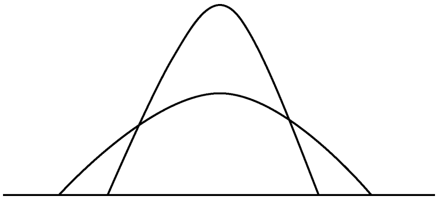


图 2-66

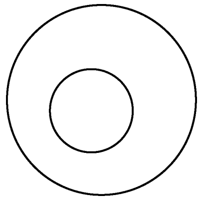


图 2-67

曲率

如图 2-68 所示，在曲线 L 上点从 M_1 移动到 M_2 时，切线转过的角度(简称转角)$\Delta\alpha$ 很小；但点从 M_2 移动到 M_3 时，切线转过的角度(转角)$\Delta\alpha'$很大. 但是单用转角来衡量曲线的弯曲程度是不完全的. 如图 2-69 所示，当点从 M 沿 L_1 移动到 M'时(弧长为 Δs)与点从 N 沿 L_2 移动到 N'时(弧长为 $\Delta s'$)，它们有相同的转角，但显然$\overset{\frown}{MM'}$比$\overset{\frown}{NN'}$的弯曲程度要小. 从图中也可看出，弯曲程度既与转角 $\Delta\alpha$ 有关(成正比)，也与经过的弧长 Δs 有关(成反比).

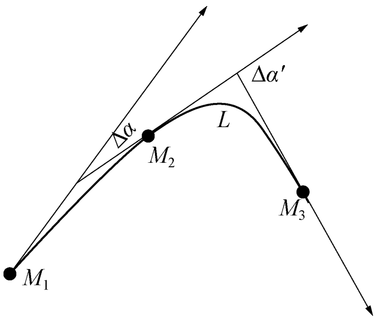


图 2-68

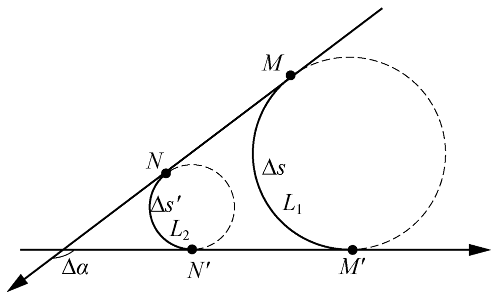


图 2-69

综合以上分析，我们引入曲率的概念.

定义　设曲线 C：$y=f(x)$是光滑的，在 C 上任取一点 $M_0(x_0, y_0)$作为度量弧长的基点. 设曲线 C 上点 $M(x, y)$对应弧 s，点 M 处曲线的切线倾斜角为 α. 点 $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$是 C 上邻近 M 的另一个点，对应弧 $s+\Delta s$，点 M'处曲线的倾斜角为 $\alpha+\Delta\alpha$(见图 2-70). 当动点由点 M 沿 C 移动到点 M'时，切线转过的角度为$|\Delta\alpha|$，比值$\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$称为弧段$\overset{\frown}{MM'}$的**平均曲率**，记作 $\overline{K}$，即

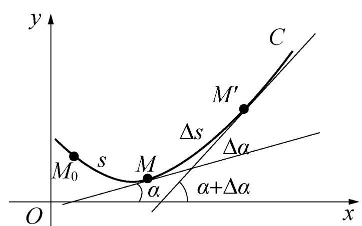


图 2-70

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|(\text{单位弧段上切线转角的大小}).$$

当 $M'\to M$ 时，$\Delta s\to 0$，将平均曲率取极限(若极限存在)，称该极限值为曲线 C 在点 M 处的**曲率**，记作 K.

$$K=\lim_{M'\to M}\overline{K}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

在$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$存在的条件下，$K$ 可以表示为

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|.$$

例 6　求直线上各点的曲率.

解　直线上各点处切线的倾斜角 α 是常量，$\Delta\alpha=0$，因此

$$K=\lim_{\Delta s\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=0.$$

这与我们直观认识到的“直线没有弯曲”一致.

例 7　求半径为 R 的圆上任意一点处的曲率.

解　在圆周上任意两点 M、M' 处圆的切线所夹角 $\Delta\alpha$ 等于中心角 MAM'（见图 2-71），且 $\angle MAM'=\frac{\Delta s}{R}$，因此 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s}=\frac{1}{R}$，即 $K=\frac{1}{R}$.

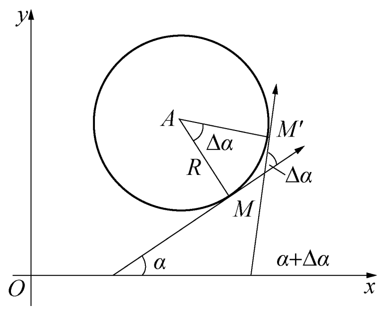


图 2-71

这表明圆上各点处的曲率都等于半径 R 的倒数 $\frac{1}{R}$，这与我们直观认识到的“圆的弯曲程度处处一样（且弯曲程度与半径成反比）”一致.

3. 曲率的计算方法

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 具二阶导数，由导数的几何意义知 $y'=\tan\alpha$，显然 $\alpha=\alpha(x)$. 由 $y'=\tan\alpha$ 两边求导得

$$y''=\sec^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=(1+\tan^2\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=(1+y'^2)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}.$$

又 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2}$，因此 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$，这样

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

特别地，当 $|y'|\ll1$ 时，$K\approx|y''|$.

当曲线方程由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ 给出时，由 $y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$y''=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$，得到

$$K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

例 8　抛物线 $y=x^2+2x$ 上哪一点处的曲率最大？

解　由 $y'=2x+2$，$y''=2$，得 $K=\frac{2}{[1+(2x+2)^2]^{\frac{3}{2}}}$. 显然，当 $x=-1$ 时，$K_{\max}=2$，此时，$(-1,-1)$ 为抛物线的顶点，可知抛物线的顶点处曲率最大.

例 9　求正弦曲线 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上各点处的曲率.

解　由 $y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，得

$$K=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2x)^{\frac{3}{2}}},\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处，$K=0$，即在点 $(0,0)$ 及点 $(\pi,0)$ 的附近，正弦曲线接近直线. 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处，$\cos x=0$，分母最小且分子 $\sin x=1$ 取最大值. 所以曲率取最大值 1，也就是正弦曲线在点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 处弯曲最厉害.

例 10　求椭圆 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$ 在点 $(0,b)$ 处的曲率.

解　点 $(0,b)$ 对应的参数 $t=\frac{\pi}{2}$，由于

$\varphi'(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a\sin t$，$\varphi''(t)=-a\cos t$，

$\psi'(t)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b\cos t$，$\psi''(t)=-b\sin t$，

故将 $t=\frac{\pi}{2}$ 代入得

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a,\ \varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$\psi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,\ \psi''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-b.$$

由曲率公式，有

$$K=\left.\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{b}{a^2}.$$

4. 曲率半径与曲率圆

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq 0)$，在点 M 处的曲线的法线上凹的一侧取一点 D，使 $|DM|=\frac{1}{K}=\rho$，以 D 为圆心、ρ 为半径作圆，称这个圆为曲线在点 M 处的曲率圆，曲率圆的圆心 D 叫作曲线在点 M 处的曲率中心，曲率圆的半径 ρ 叫作曲线在点 M 处的曲率半径（见图 2-72）.

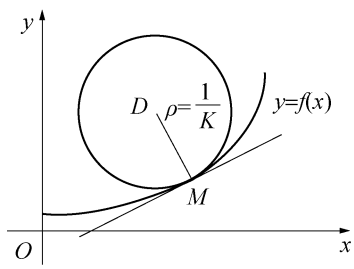


图 2-72

由上述定义可知：

（1）曲率圆与曲线在点 M 处有相同的切线与曲率，且在点 M 的邻近有相同的凹向，因此，往往可用曲率圆在点 M 附近的一段弧来近似代替曲线弧，而使问题得到简化.

（2）$\rho=\frac{1}{K}$，$K=\frac{1}{\rho}$.

例 11　求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率与曲率半径.

解　$y'=\sec^2 x$，$y''=2\sec^2 x\tan x=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$，曲率 K 及曲率半径 ρ 分别为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\ \rho=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

由$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2$ 及$y''\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$，得点$\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$处的曲率与曲率半径分别为 $K=\frac{4\sqrt{5}}{25}$，$\rho=\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

例 12　设一工件上的椭圆孔形$\overset{\frown}{CBD}$为椭圆$\frac{x^2}{40^2}+\frac{y^2}{50^2}=1$ 上的一段弧(见图 2-73). 若用砂轮磨削其内表面，问：砂轮的直径最大可选为多少？

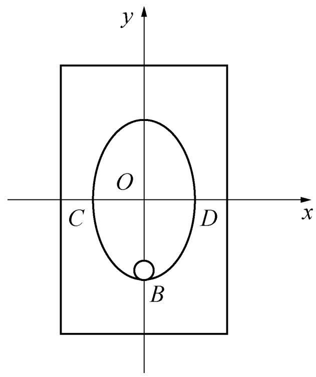


图 2-73

解　求弧$\overset{\frown}{CBD}$在 B 点处的曲率. 弧$\overset{\frown}{CBD}$的方程为

$$y=-50\sqrt{1-\frac{x^2}{40^2}}=-\frac{5}{4}\sqrt{1\ 600-x^2}.$$

$$y'=\frac{5}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{1\ 600-x^2}},\ y''=\frac{2\ 000}{(1\ 600-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在点 $x=0$ 处，$y'=0$，$y''=\frac{1}{32}$，代入曲率公式得 B 点处的曲率 $K=\frac{1}{32}$，曲率半径$\rho=32$. 所以砂轮的直径不得超过 64 个单位.

习题 2-7

1. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值：

(1) $y=x^4-2x^2+5$，$[-2,\ 2]$；　　(2) $y=\sqrt{x(10-x)}$，$[0,\ 10]$；

(3) $y=x+\sqrt{1-x}$，$[-5,\ 1]$；　　(4) $y=\frac{x^2}{1+x}$，$\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$.

2. 求函数 $y=\sin 2x-x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的最大值及最小值.

3. 已知铁路 AB 长为 100 km，工厂 C 距 A20 km，现要在铁路线上选一点 D，向工厂修筑公路. 已知铁路与公路每千米费用之比为 3∶5，为使货物从 B 到 C 的运费最省，求 D 的位置.

4. 求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积最大的矩形的各边之长.

5. 欲做一个底面为长方形的带盖的箱子，其体积为 72 cm^3，其底边成 1∶2 关系，问：各边的长为多少时，才能使表面积最小？

6. 某车间靠墙壁要盖一间面积为 64 m^2 的长方形小屋，而现有存砖只够砌 24 m 长的墙壁，问：这些存砖是否足够围成小屋？

7. 在直线 $3x-y-3=0$ 上求一点，使它与点 $A(1,\ 1)$ 和 $B(6,\ 4)$ 的距离平方和最小.

8. 若直角三角形的一个直角边与斜边之和为常数 a，求具有最大面积的直角三角形.

9. 从半径为 R 的圆上截下中心角为 θ 的扇形，卷成一圆锥形漏斗，问：θ 为何值时，漏斗的容积最大.

10. 在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上找一点 $P(x,y)$，使椭圆在该点处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积最小.

11. 某工厂要建造一个容积为 300 m^3 的带盖圆桶，问：半径 r 和桶高 h 如何确定，才能使所用材料最省？

12. 生产某种商品 x 单位的利润是 $L(x)=5\,000+x-0.000\,01x^2$（元），问：生产多少个单位时获利润最大？

13. 某厂每批生产 A 商品 x 台的费用为 $C(x)=5x+200$（万元），得到的收入为 $R(x)=10x-0.01x^2$（万元），问：每批生产多少台，才能使利润最大？

14. 求圆 $x^2+y^2=R^2$ 上任一点处的弧微分.

15. 求抛物线 $y=x^2+x$ 上任一点处的弧微分及在点(0，0)处的曲率.

16. 求双曲线 $xy=4$ 在点(2，2)处的曲率.

17. 求立方抛物线 $y=x^3$ 在点(0，0)及点(2，8)处的曲率.

18. 曲线 $y=e^x$ 在哪一点处的曲率最大，最大曲率是多少？

19. 椭圆 $x=2\cos t$，$y=3\sin t$ 上哪些点处曲率最大？

20. 求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在点$(0，b)$处的曲率及曲率半径.

21. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0，2)处的曲率.

22. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

23. 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$，$t\in(0,2\pi)$ 的曲率，t 为何值时，曲率最小？求最小曲率和该点处的曲率半径.

24. 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在点 $x=0$ 处与曲线 $y=e^x$ 相切且有相同的曲率半径，试确定系数 a，b，c.

25. 设 $y=f(x)$ 为过原点的一条曲线，$f'(0)$，$f''(0)$ 存在，有一条抛物线 $y=g(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 在原点相切，在该点处有相同的曲率，且在该点附近这两条曲线有相同的凹向，求 $g(x)$.

26. 汽车连同载重共 5 t，在抛物线拱桥上行驶，速度为 21.6 km/h，桥的跨度为 10 m，拱的矢高为 0.25 m，求汽车越过桥顶时对桥的压力（见图 2-74）.

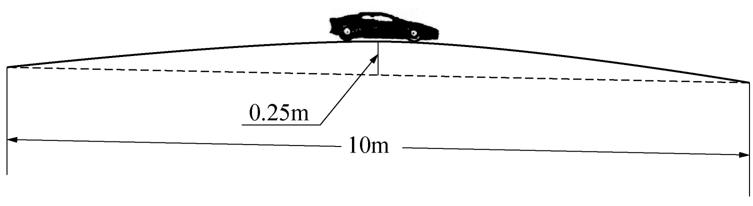


图 2-74

27. 飞机沿抛物线 $y=x^2/4\,000$（单位为 m）俯冲飞行，在原点处速度为 $v=400$ m/s，飞行员体重为 70 kg. 求俯冲到原点时，飞行员对座椅的压力.

本章小结

本章小结

导数与微分	理解 导数与微分的概念、几何意义、物理意义 会求导 基本公式、四则运算、复合函数隐函数、反函数、参数方程求导及高阶导数 会求 平面曲线的切线与法线方程
微分中值定理	理解 Roll、Lagrange、Cauchy、Taylor 定理 会用 定理证明相关问题 会用 洛必达法则求不定式的极限
应用	会用 导数求单调性与极值、最值、凹凸性、渐进线等问题，能画简图 会计算 曲率(半径)

章节测试二

一、填空选择题：

1. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是在 $[a, b]$ 上可导的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要　　C. 充分必要　　D. 无关

2. 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$________.

3. 已知 $y=x\sin^2 x$，则 $y'=$________，$y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$________ .

4. 若 $f''(x)$ 存在，$y=f(\sin x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________.

5. $\left(\dfrac{\cos x}{1+x^2}\right)'=$________.

6. 叙述拉格朗日中值定理的条件和结论：____________________________________

____；

对函数 $f(x)=x^3+2x-1$，$x\in[-2, 2]$，验证结论成立的点 $\xi=$____________.

7. $y=e^{3x}$ 的 n 阶导数为____________.

二、解答题：

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-4x^2)}{x}, & x>0,\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，试求常数 a，b.

2. 设 y 为 x 的函数是由方程 $\sin y=\ln(x+y)$ 确定的，求 y'.

3. 函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t^3\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

三、已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求：

(1) 函数的单调区间；(2) 函数图形的凹凸区间；(3) 函数图形的拐点.

四、证明当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$.

五、求 $y=\sqrt{1-x}$ 的切线与 x 轴及 y 轴所围图形面积的最小值.

六、求证：方程 $e^x+e^{-x}=4+\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恰有两个根.

拓展阅读

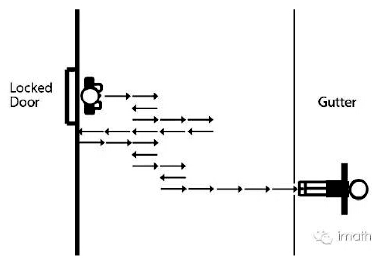
一些有趣的数学定理

谁说数学是枯燥的？在数学里，有很多欢乐而又深刻的数学定理. 这些充满生活气息的数学定理，不但深受数学家们的喜爱，在数学迷的圈子里也广为流传.

1. 喝醉的小鸟

定理

喝醉的酒鬼总能找到回家的路，喝醉的小鸟则可能永远也回不了家.



假设有一条水平直线，从某个位置出发，每次有50%的概率向左走 1 m，有 50%的概率向右走 1 m. 按照这种方式无限地随机游走下去，最终能回到出发点的概率是多少？答案是 100%. 在一维随机游走过程中，只要时间足够长，最终总能回到出发点.

现在考虑一个喝醉的酒鬼，他在街道上随机游走. 假设整个城市的街道呈网格状分布，酒鬼每走到一个十字路口，都会概率均等地选择一条路(包括自己来时的那条路)继续走下去. 那么他最终能够回到出发点的概率是多少呢？答案也还是 100%. 刚开始，这个酒鬼可能会越走越远，但最后他总能找到回家的路.

不过，醉酒的小鸟就没有这么幸运了. 假如一只小鸟飞行时，每次都从上、下、左、右、前、后中概率均等地选择一个方向，那么它很有可能永远也回不到出发点. 事实上，在三维网格中随机游走，最终能回到出发点的概率大约只有 34%.

这个定理是著名数学家波利亚(George Pólya)在 1921 年证明的. 随着维度的增加，回到出发点的概率将变得越来越低. 在四维网格中随机游走，最终能回到出发点的概率是 19.3%；而在八维空间中，这个概率只有 7.3%.

2. 你在这里

定理

把一张当地的地图平铺在地上，则总能在地图上找到一点，这个点下面的地上的点正好就是它在地图上所表示的位置.

也就是说，如果在商场的地板上画了一张整个商场的地图，那么你总能在地图上精确地作一个“你在这里”的标记.

1912 年，荷兰数学家布劳威尔(Luitzen Brouwer)证明了这样一个定理：假设 D 是某个



圆盘中的点集，f 是一个从 D 到它自身的连续函数，则一定有一个点 x，使得 $f(x)=x$. 换句话说，让一个圆盘里的所有点做连续的运动，则总有一个点可以正好回到运动之前的位置. 这个定理叫作布劳威尔不动点定理(Brouwer Fixed Point Theorem).

除了上面的“地图定理”，布劳威尔不动点定理还有很多其他奇妙的推论. 如果取两张大小相同的纸，把其中一张纸揉成一团之后放在另一张纸上，根据布劳威尔不动点定理，纸团上一定存在一点，它正好位于下面那张纸的同一个点的正上方.

这个定理也可以扩展到三维空间中去：当你搅拌完咖啡后，一定能在咖啡中找到一个点，它在搅拌前后的位置相同(尽管这个点在搅拌过程中可能到过别的地方).

3. 不能抚平的毛球

定理

你永远不能理顺椰子上的毛.



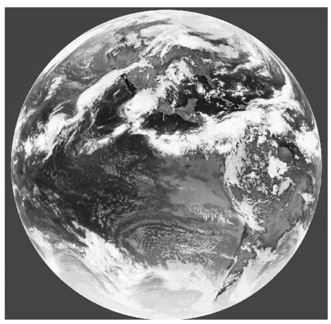
想象一个表面长满毛的球体，你能把所有的毛全部梳平，不留下任何像鸡冠一样的一撮毛或者像头发一样的旋吗？拓扑学告诉你，这是办不到的. 这叫作毛球定理(Hairy Ball Theorem). 它也是由布劳威尔首先证明的. 用数学语言来说就是，在一个球体表面，不可能存在连续的单位向量场. 这个定理可以推广到更高维的空间：对于任意一个偶数维的球面，连续的单位向量场都是不存在的.

毛球定理在气象学上有一个有趣的应用：由于地球表面的风速和风向都是连续的，因此由毛球定理，地球上总会有一个风速为 0 的地方. 也就是说，气旋和风眼是不可避免的.

4. 气候完全相同的另一端

定理

在任意时刻，地球上总存在对称的两点，它们的温度和大气压的值正好都相同.



波兰数学家乌拉姆(Stanislaw Marcin Ulam)曾经猜想，任意给定一个从 n 维球面到 n 维空间的连续函数，总能在球面上找到两个与球心相对称的点，它们的函数值是相同的. 1933 年，波兰数学家博苏克(Karol Borsuk)证明了这个猜想，这就是拓扑学中的博苏克-乌拉姆定理(Borsuk-Ulam Theorem).

博苏克-乌拉姆定理有很多推论，其中一个推论就是在地球上总存在对称的两点，它们的温度和大气压的值正

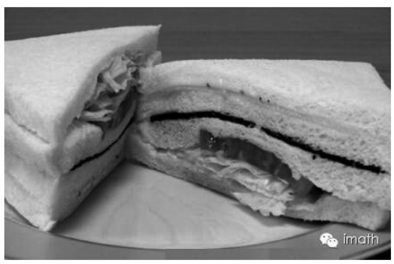
好都相同(假设地球表面各地的温度差异和大气压差异是连续变化的). 这是因为, 我们可以把温度值和大气压值所有可能的组合看成平面直角坐标系上的点, 于是地球表面各点的温度和大气压变化情况就可以看作二维球面到二维平面的函数. 由博苏克-乌拉姆定理便可推出, 一定存在两个函数值相等的对称点.

当 $n=1$ 时, 博苏克-乌拉姆定理则可以表述为, 在任一时刻, 地球的赤道上总存在温度相等的两个点. 对于这个弱化版的推论, 我们有一个非常直观的证明方法: 假设赤道上有 A、B 两个人, 他们站在关于球心对称的位置上. 如果此时他们所在地方的温度相同, 问题就已经解决了. 下面我们只需要考虑他们所在地点的温度一高一低的情况. 不妨假设 A 所在的地方是 10℃, B 所在的地方是 20℃. 现在, 让两人以相同的速度、相同的方向沿着赤道旅行, 保持两人始终在对称的位置上. 假设在此过程中, 各地的温度均不变. 旅行过程中, 两人不断报出当地的温度. 等到两人都环行赤道半周后, A 就到了原来 B 的位置, B 也到了 A 刚开始时的位置. 在整个旅行过程中, A 所报的温度从 10℃ 开始连续变化(有可能上下波动甚至超出 10℃ 到 20℃ 的范围), 最终变成了 20℃; 而 B 经历的温度则从 20℃ 出发, 最终连续变化到了 10℃. 那么, 他们所报的温度值在中间一定有"相交"的一刻. 这样一来, 我们也就找到了赤道上两个温度相等的对称点.

5. 平分火腿三明治

定理

任意给定一个火腿三明治, 总有一刀能把它切开, 使得火腿、奶酪和面包均被分成两等份.



更有趣的是, 这个定理的名字真的就叫作"火腿三明治定理"(Ham Sandwich Theorem). 它是由数学家亚瑟·斯通(Arthur Stone)和约翰·图基(John Tukey)在 1942 年证明的, 在测度论中有着非常重要的意义.

火腿三明治定理可以扩展到 n 维的情况: 如果在 n 维空间中有 n 个物体, 那么总存在一个 $n-1$ 维的超平面, 它能把每个物体都分成"体积"相等的两份. 这些物体可以是任何形状, 还可以是不连通的(比如面包片), 甚至可以是一些奇形怪状的点集, 只要满足点集可测就行了.

第三章　一元函数积分学及其应用

第一节　不定积分的概念与性质

[课前导读]

上一章介绍了导数的概念，例如，已知函数 $y=\sin 2x$，求其导函数，即

$$y'=(\sin 2x)'=2\cos 2x.$$

现在我们来做一件相反的事情：已知某个函数的导函数是 $\cos 2x$，即

$$(\quad)'=\cos 2x，\text{问：这个函数是什么？}$$

利用导数公式可以猜到，这个函数可以是 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$，也可以是 $y=\frac{1}{2}\sin 2x+1$，答案并不唯一.

这种已知函数的导数或微分，求该函数的运算称为“积分”运算. 本节将介绍不定积分的概念及其计算方法.

一、原函数

定义 1　已知 $f(x)$ 是定义在某区间 I 内的函数，若存在函数 $F(x)$，使得

$$F'(x)=f(x) \text{ 或者 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,\ x\in I,$$

则称 $F(x)$ 为区间 I 上 $f(x)$ 的原函数.

可以证明，若函数 $f(x)$ 在某区间上连续，则在该区间上 $f(x)$ 的原函数一定存在，即在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使 $F'(x)=f(x)$. 也就是说，连续函数一定有原函数.

另外，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，因

$$[F(x)+C]'=f(x)\ (C \text{ 为任意常数}),$$

故 $F(x)+C$ 也为 $f(x)$ 的原函数. 由于 C 的任意性，故 $f(x)$ 有无穷多个原函数.

假设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，因为 $F'(x)=G'(x)=f(x)$，故由拉格朗日中值定理的推论可知，$G(x)$ 和 $F(x)$ 只相差一个常数，即 $G(x)=F(x)+C$.

因此，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的全部原函数可以表示为

$$F(x)+C\ (C \text{ 为任意常数}).$$

二、不定积分

定义 2　在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

不定积分的概念

其中，符号 $\int$ 称为**积分号**，称 $f(x)$ 为**被积函数**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

由定义知，求函数 $f(x)$ 的不定积分，就是求 $f(x)$ 的全体原函数. 在 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 中，积分号 $\int$ 表示对函数 $f(x)$ 施行求原函数的运算，故求不定积分的运算实质上就是求导（求微分）运算的逆运算.

按照定义，一个函数的原函数或不定积分都有相应的定义区间. 为了简便起见，如无特别的说明，今后就不再注明.

例 1　设 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 均连续，问：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]$ 与 $\int f'(x)\,\mathrm{d}x$ 是否相等？

解　不相等.

设 $F'(x)=f(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x)+C]=F'(x)+0=f(x).$$

而由不定积分定义 $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$，知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]\neq\int f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 2　求 $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x\ (\alpha\neq-1)$.

解　因为 $(x^{\alpha+1})'=(\alpha+1)x^{\alpha}$，所以 $\left(\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$，即 $\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^{α} 的一个原函数. 故

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C.$$

例 3　求 $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\ \left(\int x^{-1}\mathrm{d}x\right)$.

解　当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

当 $x<0$ 时，即 $-x>0$ 时，$[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}$.

故 $\ln x$ 为 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数，$\ln(-x)$ 为 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上的一个原函数.

故当 $x\neq0$ 时，$\ln|x|$ 为 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数，从而

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C\ (x\neq0).$$

例 4　求 $\int a^{x}\,\mathrm{d}x\ (a\neq1,\ a>0)$.

解　因$(a^x)'=a^x\ln a$，$\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$，故$\dfrac{a^x}{\ln a}$是$a^x$的一个原函数，

从而

$$\int a^x \mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C.$$

例 5　设曲线通过点(1，1)，且其上任意一点处的切线斜率等于这点横坐标的平方，求此曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为$y=f(x)$. 根据题意知曲线上任意一点(x,y)处的切线斜率为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$. 由$\int x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3+C$，得曲线方程$y=\dfrac{1}{3}x^3+C$.

又$y\big|_{x=1}=1$，故$C=\dfrac{2}{3}$，因此所求的曲线方程为

$$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}.$$

以$\int x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C$为例，我们来看关于不定积分的几何意义.

$y=\dfrac{x^3}{3}+C$的图形为$y=\dfrac{x^3}{3}$的图形沿y轴方向移动一段距离$|C|$得到的. $C>0$时向上移，$C<0$时向下移(见图3-1). 通常称$f(x)$的一个原函数$F(x)$的图形为函数$f(x)$的**积分曲线**，不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$在几何上表示积分曲线族. 在积分曲线族上，横坐标相同的点处的切线是相互平行的.

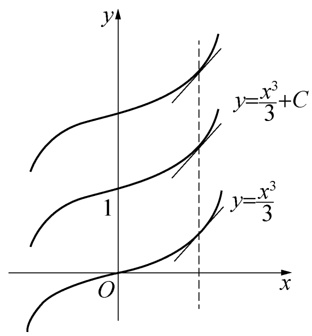


图 3-1

三、基本积分公式

由于积分运算是微分运算的逆运算，所以由基本求导公式可以直接得到基本积分公式.

(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$；　　(2) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$；

(3) $\int x^\mu \mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C(\mu\neq-1)$；　　(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$；

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C=-\mathrm{arccot}x+C$；

(6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C$；

(7) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；　　(8) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

(9) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$；　　(10) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

(11) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；　　(12) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

(13) $\int e^x dx = e^x + C$;　　(14) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

四、不定积分的性质

性质 1(积分与求导的关系)　设函数 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 的原函数存在，则

(1) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$;

(2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

由此可见，求导运算与不定积分的运算(简称积分运算，以记号 $\int$ 表示)是"互逆"的.

性质 2　设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx,$$

其中 α, β 为不全为零常数.

利用上述性质及基本积分公式表，可以求出一些简单函数的不定积分.

例 6　求下列不定积分.

(1) $\int\left(x^4 + 3^x + \frac{2}{x} + 2\sin x - 3\cos x\right)dx$;　　(2) $\int (1+\sqrt{x})^2 dx$;

(3) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$;　　(4) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(5) $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$;　　(6) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$;

(7) $\int 2^x e^x dx$;　　(8) $\int \frac{2^x - 3^x}{5^x}dx$;

(9) $\int \tan^2 x dx$;　　(10) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$;

(11) $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx$;　　(12) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

解　(1) $\int\left(x^4 + 3^x + \frac{2}{x} + 2\sin x - 3\cos x\right)dx = \int x^4 dx + \int 3^x dx + 2\int\frac{1}{x}dx + 2\int \sin x dx - 3\int\cos x dx$

$$= \frac{1}{5}x^5 + \frac{3^x}{\ln 3} + 2\ln|x| - 2\cos x - 3\sin x + C.$$

注　上式中的五个不定积分常数合并为一个任意常数 C.

(2) 因为 $(1+\sqrt{x})^2 = 1 + 2\sqrt{x} + x$，故

$$\int (1+\sqrt{x})^2 dx = \int (1 + 2\sqrt{x} + x^2)dx = \int dx + 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x dx = x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

注　其中 $\int 1dx = \int dx$.

（3）先将$(x-1)^3$展开，然后利用公式.

$$\int\frac{(x-1)^3}{x^2}dx=\int\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx=\int\left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

（4）$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C.$

（5）将分子重新组合后，分解被积表达式.

$$\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\arctan x+\ln|x|+C.$$

（6）分子部分减一项加一项后，分解被积表达式.

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}dx$$
$$=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C.$$

（7）$\int 2^x e^x dx=\int(2e)^x dx=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+C=\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C.$

（8）$\int\frac{2^x-3^x}{5^x}dx=\int\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right]dx=\frac{1}{\ln2-\ln5}\left(\frac{2}{5}\right)^x-\frac{1}{\ln3-\ln5}\left(\frac{3}{5}\right)^x+C.$

（9）利用三角函数关系式$\sec^2x=\tan^2x+1$.

$$\int\tan^2x dx=\int(\sec^2x-1)dx=\tan x-x+C.$$

（10）利用半角公式$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$.

$$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos x)dx=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$$

（11）利用正弦函数的二倍角公式$\sin2x=2\sin x\cos x$.

$$\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{4}{\sin^2x}dx=4\int\csc^2x dx=-4\cot x+C.$$

（12）利用余弦函数的二倍角公式$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$.

$$\int\frac{\cos2x}{\cos^2x\sin^2x}dx=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x\sin^2x}dx=\int(\csc^2x-\sec^2x)dx$$
$$=-\cot x-\tan x+C.$$

例 7　已知$F'(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$，$F(0)=1$. 求满足条件的函数$F(x)$.

解　由立方和公式可知，$1+x=1+(\sqrt[3]{x})^3=(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$.
根据题设条件，有

$$F(x)=\int F'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int (1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\int 1\ \mathrm{d}x-\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x+\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x=x-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C.$$

又 $F(0)=1$，得 $C=1$. 所以

$$F(x)=x-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+1.$$

习题 3-1

1. 下列等式中成立的是(　　).

A. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　B. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

C. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　　D. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

2. 求下列不定积分：

(1) $\int (x^2+5\sqrt{x}+\ln 3)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$；

(5) $\int \left(x^2+2^x+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$；　　(6) $\int (a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}})\mathrm{d}x$；

(7) $\int (2x^3-\sin x+5\sqrt{x})\mathrm{d}x$；　　(8) $\int \frac{\sqrt{x}-x+x^2\mathrm{e}^x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(9) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x$；　　(10) $\int (1-\sqrt[3]{x^2})^2\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(12) $\int \frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；　　(14) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(15) $\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；　　(16) $\int \mathrm{e}^{-x}\left[\mathrm{e}^{2x}-\frac{\mathrm{e}^x(x+1)}{x^2}\right]\mathrm{d}x$；

(17) $\int (2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$；　　(18) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；

(19) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；　　(20) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$；

(21) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$；　　(22) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$；

(23) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$；　　(24) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x\sin^2x}$；

(25) $\int \mathrm{e}^{x+2}\mathrm{d}x$；　　(26) $\int 3^{2x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

3. 已知平面曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率为 $k=4x^3-1$，且曲线经过点 $P(1, 3)$，求该曲线方程.

4. 一曲线上任意一点 (x, y) 处的切线斜率为 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，且 $x=1$ 时，$y=0$，求曲线 $y=f(x)$ 的方程.

5. 一曲线通过 $(\mathrm{e}^2, 3)$，且在任意一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

6. 已知 $f'(x)=1+x^2$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

7. 设函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$，$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$，求 $F(x)$.

第二节　不定积分的换元法与分部法

[课前导读]

本节主要讨论复合函数和乘积函数的积分. 在学习换元法和分部法之前，我们要先复习一下本节会用到的微分公式和三角函数的积化和差公式.

微分计算： $k\mathrm{d}x=\mathrm{d}(kx)$；$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$；

$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln|x|)$；$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$；

$\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sqrt{x})$；$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$；

$\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)$；$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$.

积化和差： $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$；

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

一、第一类换元法(凑微分法)

利用上节介绍的不定积分的性质及基本积分公式表，所能计算的不定积分是很有限的，必须进一步研究不定积分的求法. 本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分，利用中间变量的代换，得到复合函数的积分法，称为**换元积分法**，简称**换元法**. 换元法通常分

为两类，即第一类换元法与第二类换元法.

定理 1　设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则 $F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数，即有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

证明　因为 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，故 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$. 又 $u=\varphi(x)$ 可微，故由复合函数微分法，有 $\mathrm{d}u[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$，

从而由不定积分定义得

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=F[\varphi(x)]+C=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$

注　第一类换元法的关键是在求 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 时，如何将 $g(x)$ 化为 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式.其具体做法可按如下步骤进行.

（1）变换积分形式（或称凑微分），即 $\int g(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$；

（2）作变量代换 $u=\varphi(x)$，有 $\int g(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u$；

（3）利用常用的积分公式求出 $f(u)$ 的原函数 $F(u)$，即得 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，从而 $\int g(x)\mathrm{d}x=F(u)+C$；

（4）回到原来的变量，将 $u=\varphi(x)$ 代入即得 $\int g(x)\mathrm{d}x=F[\varphi(x)]+C$.

读者在熟练了这四个步骤以后，也可不必引入中间变量 $u=\varphi(x)$. 这和我们学习过的复合函数求导法则相类似. 请看下面的例题.

凑微分的步骤

例 1　求 $\int(3x+2)^5\mathrm{d}x$.

解　（1）变换积分形式：因为 $3\mathrm{d}x=\mathrm{d}(3x)=\mathrm{d}(3x+2)$，所以

$$\int(3x+2)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+2)^5\cdot 3\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+2)^5\mathrm{d}(3x+2);$$

（2）设变量代换：令 $u=3x+2$，得 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}(3x+2)=3\mathrm{d}x$，即有

$$\int(3x+2)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int u^5\mathrm{d}u;$$

（3）利用基本积分公式求上式右端积分：$\frac{1}{3}\int u^5\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u^6+C$，

从而

$$\int(3x+2)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{18}u^6+C;$$

（4）回到原来变量，将 $u=3x+2$ 代入上式，得所求积分为

$$\int(3x+2)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C.$$

一般地，当被积函数形式为 $f(ax+b)$ 时，可作变换 $u=ax+b$，即若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

例 2　求不定积分 $\int\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2x}\cdot 2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2x}\cdot(1+2x)'\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}(1+2x)\xlongequal{1+2x=u}\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\ln|u|+C\xlongequal{u=1+2x}\frac{1}{2}\ln|1+2x|+C.$$

例 3　求不定积分：

(1) $\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$，故

$$\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}(\ln x)\xlongequal{\ln x=u}\int u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}u^2+C\xlongequal{u=\ln x}\frac{1}{2}\ln^2x+C.$$

注　$f(\ln x)\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x=f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$.

(2) $$\int\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x\ln(\ln x)}\mathrm{d}(\ln x)$$
$$=\int\frac{1}{\ln(\ln x)}\mathrm{d}[\ln(\ln x)]=\ln|\ln(\ln x)|+C.$$

例 4　求：(1) $\int 2x\sin x^2\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $2x\mathrm{d}x=(x^2)'\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^2$，故

$$\int 2x\sin x^2\mathrm{d}x=\int\sin x^2\mathrm{d}x^2=-\cos x^2+C.$$

(2) 因为 $x\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+3)$，故

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}(x^2+3)=\frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

注　若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则

$$\int f(x^2)2x\mathrm{d}x=F(x^2)+C.$$

例 5　求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 原式 $=\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$$=\int dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int dx-\int\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$$

$$=x-\ln(1+e^x)+C.$$

(2) $\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx=\int\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'dx=-\int\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot d\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)+C.$

注　$\int f(e^x)e^xdx=\int f(e^x)d(e^x)$；$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right).$

例 6　求：(1) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx\ (a>0)$；　(2) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\ (a>0).$

解　(1) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$

(2) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

例 7　求 $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx\ (a>0).$

解　先作分解：$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$，然后积分.

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}d(x-a)-\int\frac{1}{x+a}d(x+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例 8　求不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx.$

解　将分母有理化：

原式 $=\int\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})}dx=\frac{1}{4}\int(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})dx$

$$=\frac{1}{4}\int\sqrt{2x+3}\,dx-\frac{1}{4}\int\sqrt{2x-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\sqrt{2x+3}\,d(2x+3)-\frac{1}{8}\int\sqrt{2x-1}\,d(2x-1)$$

$$=\frac{1}{12}(\sqrt{2x+3})^3-\frac{1}{12}(\sqrt{2x-1})^3+C.$$

注　利用平方差公式进行根式有理化是化简积分计算的常用手段之一.

例 9　求下列不定积分：

(1) $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$；　　　　(2) $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解　(1) $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{3\sqrt{x}}d(\sqrt{x}) = \frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}d(3\sqrt{x}) = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}}+C$；

(2) $$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \tan\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = 2\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}d(\sqrt{x})$$

$$= -2\int \frac{1}{\cos\sqrt{x}}d(\cos\sqrt{x}) = -2\ln|\cos\sqrt{x}|+C.$$

注　$\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int f(\sqrt{x})\ d(\sqrt{x})$.

例 10　求 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

解　注意到 $d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 即可.

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x} = \int 2\arctan\sqrt{x}\,d(\arctan\sqrt{x})$$

$$= (\arctan\sqrt{x})^2+C.$$

例 11　求不定积分 $\int \sin2x\,dx$.

解一　原式 $= \frac{1}{2}\int \sin2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}\cos2x+C$；

解二　原式 $= 2\int \sin x\cos x\,dx = 2\int \sin x\,d(\sin x) = (\sin x)^2+C$；

解三　原式 $= 2\int \sin x\cos x\,dx = -2\int\cos x\,d(\cos x) = -(\cos x)^2+C$.

在这里我们可以发现，一个函数的原函数可以有不同的表现形式.

注
$$f(\sin x)\cos x\,dx = f(\sin x)\,d(\sin x)；$$
$$f(\cos x)\sin x\,dx = -f(\cos x)\,d(\cos x).$$

例 12　求：(1) $\int \tan x\,dx$；(2) $\int \cot x\,dx$.

解　(1) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x) = -\ln|\cos x|+C$.

(2) 同理可得 $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|+C$.

例 13　求：(1) $\int \sin^3 x\,dx$；　　　　(2) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$；

(3) $\int\cos^2 x\,dx$；　　　　(4) $\int \sec^4 x\,dx$.

解　(1) 因为 $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=\sin^2 x\cdot(-\cos x)'=(1-\cos^2 x)\cdot(-\cos x)'$，所以

$$\int\sin^3 x\mathrm{d}x=-\int(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

(2) 因为 $\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cdot\cos x=\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$，所以

$$\begin{aligned}\int\sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x&=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cdot\cos x\mathrm{d}x=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)\\&=\int(\sin^2 x-\sin^4 x)\mathrm{d}(\sin x)\\&=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int\cos^2 x\mathrm{d}x&=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int\sec^4 x\mathrm{d}x&=\int\sec^2 x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\mathrm{d}(\tan x)=\int(1+\tan^2 x)\mathrm{d}(\tan x)\\&=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.\end{aligned}$$

例 14　求：(1) $\int\csc x\mathrm{d}x$；　　　(2) $\int\sec x\mathrm{d}x$.

解　(1) $$\begin{aligned}\int\csc x\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\\&=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,\end{aligned}$$

又 $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\cot x$，故

$$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

(2) $$\begin{aligned}\int\sec x\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\\&=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C\\&=\ln|\sec x+\tan x|+C.\end{aligned}$$

也可用下列方法解决.

$$\begin{aligned}\int \sec x\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right]\mathrm{d}(\sin x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right|+C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C \\ &= \ln|\sec x+\tan x|+C.\end{aligned}$$

例 15　求：(1) $\int\cos 3x\cos x\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int \sin 3x\cos x\mathrm{d}x$.

解　(1) 利用三角函数的积化和差公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

可得

$$\begin{aligned}\int\cos 3x\cos x\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C \\ &= \frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\end{aligned}$$

(2) 利用三角函数的积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

可得

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\cos x\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 4x}{4}-\frac{\cos 2x}{2}\right)+C \\ &= -\frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos 2x}{4}+C.\end{aligned}$$

注　第一类换元法也称凑微分法，有时也需要一定的技巧，这需要读者进一步练习.

二、第二类换元法

如果在积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中，令 $x=\varphi(t)$，且 $\varphi(t)$ 可导，$\varphi'(t)\neq 0$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

若上式右端易求出原函数 $\Phi(t)$，则得第二类换元积分公式 $\int f(x)\mathrm{d}x = \Phi[\varphi^{-1}(x)]+C$，其中 $\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数，即 $t=\varphi^{-1}(x)$.

其具体做法可按如下步骤进行.

(1) 变换积分形式，即直接或间接地令 $x=\varphi(t)$，且保证 $\varphi(t)$ 可导及 $\varphi'(t)\neq 0$，于是有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t;$$

（2）求出$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数$\Phi(t)$，即得$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\Phi(t)+C$，从而

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\Phi(t)+C;$$

（3）回到原来变量，即由$x=\varphi(t)$解出$t=\varphi^{-1}(x)$，从而得所求的积分

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

定理2　设$x=\varphi(t)$是可导的函数，且$\varphi'(t)\neq0$，又$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数$\Phi(t)$，则$\Phi[\varphi^{-1}(x)]$是$f(x)$的原函数，即有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C=\left\{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right\}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

证明　设$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数为$\Phi(t)$，记$\Phi[\varphi^{-1}(x)]=F(x)$. 由于

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x),$$

即$F(x)$是$f(x)$的原函数，所以有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C=\left\{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right\}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

例16　求$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

解　令$t=\sqrt{x-1}$，则$t^2=x-1$，即$x=t^2+1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x&=\int\frac{t}{t^2+1}\cdot2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=2(t-\arctan t)+C\\&=2(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+C.\end{aligned}$$

例17　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解　令$\sqrt[3]{x+2}=t$，则$t^3=x+2$，即$x=t^3-2$，$\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}&=\int\frac{3t^2\mathrm{d}t}{1+t}=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}\mathrm{d}t=3\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\&=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)+C\\&=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C.\end{aligned}$$

注　当被积函数中含有$\sqrt[n]{ax+b}$时，可令$\sqrt[n]{ax+b}=t$.

例18　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解　令$\sqrt[6]{x}=t$，则$t^6=x$，即$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}&=\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)t^3}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.\end{aligned}$$

例 19　求不定积分 $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

解　令 $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos t dt$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt$$
$$=4\int\cos^2 t dt=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$=2\int(1+\cos 2t)dt=2t+\sin 2t+C.$$

因为 $\sin 2t=2\sin t\cos t$，而 $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$，

又 $x=2\sin t$，即 $\sin t=\frac{x}{2}$，$t=\arcsin\frac{x}{2}$，从而

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

则

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=2t+\sin 2t+C=2t+2\sin t\cos t+C$$
$$=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C$$
$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C.$$

例 20　求：(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$；　　(2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

解　(1) 令 $x=3\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{3\sec^2 t dt}{3\sec t}=\int\sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$

由 $\tan t=\frac{x}{3}$ 知 $\sec t=\sqrt{1+\tan^2 t}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$，故

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{x}{3}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C.$$

(2) 令 $x=\sec t$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，(设 $x>1$，当 $x<-1$ 时同理可证)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sec t\tan t}{\tan t}dt=\int\sec t dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$$
$$=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

一般地，当被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{x^2\pm a^2}$ 等因子时，可作三角代换. 比如当被积函数中含有因子 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，可作三角代换：$x=a\sin t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

当被积函数中含有因子$\sqrt{x^2+a^2}$时，可作三角代换：$x=a\tan t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

当被积函数中含有因子$\sqrt{x^2-a^2}$时，可作三角代换：$x=a\sec t$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 21　求$\int\dfrac{dx}{x^8+x}$.

解　被积函数的分母次幂较高，我们通常采取“倒代换”的方法.

令$x=\dfrac{1}{t}$，则$dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$，于是

$$\int\frac{dx}{x^8+x}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^8}+\frac{1}{t}}=-\int\frac{t^6}{1+t^7}dt=-\frac{1}{7}\int\frac{d(t^7)}{1+t^7}$$

$$=-\frac{1}{7}\ln|1+t^7|+C=-\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7+1}{x^7}\right|+C.$$

在本节的例子中，有几个积分的类型是以后经常用到的，通常也可以当作公式使用，于是又多了几个积分公式.（其中$a>0$）

（1）$\int\tan x dx=-\ln|\cos x|+C$；　　（2）$\int\cot x dx=\ln|\sin x|+C$；

（3）$\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$；　　（4）$\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

（5）$\int\dfrac{1}{a^2+x^2}dx=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$；　　（6）$\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$；

（7）$\int\dfrac{1}{x^2-a^2}dx=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$；　　（8）$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$.

三、分部积分法

分部积分法是针对解决某些被积函数是两类不同函数乘积的不定积分，它是由两个函数的乘积的微分运算法则推得的一种求积分的基本方法.

若$u=u(x)$，$v=v(x)$具有连续导数，则$(uv)'=u'v+uv'$，即$uv'=(uv)'-u'v$. 两边积分，得$\int uv'dx=\int(uv)'dx-\int u'vdx$，即$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$，也可写作

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

例 22　求下列积分：（1）$\int x\cos x dx$；　　（2）$\int x^2e^x dx$.

解　（1）本题没有基本积分公式可以直接套用，两类换元法也无能为力. 本题特点是被积函数为幂函数和三角函数这两类函数的乘积，可用分部积分法求解.

取$u=x$，$dv=\cos x dx$.

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\sin x)=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$$

注　分部积分法的关键是正确选择 u 和 $\mathrm{d}v$，并最终使积分 $\int v\mathrm{d}u$ 能够求得. 本例若改变 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选择，设 $u=\cos x$，而 $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$，则

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\cos x-\int\frac{1}{2}x^2(-\sin x)\mathrm{d}x,$$

等式右端的积分结果反而比原积分更复杂.

（2）取 $u=x^2$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x^2\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\cdot 2x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^2-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=x^2\mathrm{e}^2-2\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\text{（再一次分部积分，取 }u=x,\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\text{）}\\&=x^2\mathrm{e}^x-2\left(x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)\\&=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

注　从此例可知，通常总是把三角函数和指数函数选作 u，幂函数选作 u'. 如果需要，可以多次使用分部积分法.

例 23　求：（1）$\int\ln x\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int x^3\ln x\mathrm{d}x$.

解　（1）取 $u=\ln x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，

$$\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\mathrm{d}(\ln x)=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$$

（2）取 $u=\ln x$，$\mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\int x^3\ln x\mathrm{d}x&=\frac{1}{4}\int\ln x\mathrm{d}(x^4)=\frac{1}{4}\left(x^4\ln x-\int x^4\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.\end{aligned}$$

例 24　求：（1）$\int\arcsin x\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解　（1）取 $u=\arcsin x$，　$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\int\arcsin x\mathrm{d}x&=x\arcsin x-\int x\mathrm{d}(\arcsin x)\\&=x\arcsin x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=x\arcsin x+\int\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\&=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

（2）取 $u=\arctan x$，$dv=xdx=\frac{1}{2}d(x^2+1)$，

$$\begin{aligned}\int x\arctan x dx &= \frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2+1)\\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}\int (x^2+1)d(\arctan x)\\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}\int (x^2+1)\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C.\end{aligned}$$

注　从以上两例可知，通常总是把对数函数和反三角函数选作 u，幂函数选作 u'.

例 25　求 $\int e^x\sin x dx$.

解　
$$\begin{aligned}\int e^x\sin x dx &= \int \sin x d(e^x)=e^x\sin x-\int e^x d(\sin x)\\ &= e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-\int \cos x d(e^x)\\ &= e^x\sin x-\left[e^x\cos x-\int e^x d(\cos x)\right]\\ &= e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx,\end{aligned}$$

将上式右端的 $\int e^x\sin x dx$ 移到等号的左端，得

$$2\int e^x\sin x dx=e^x(\sin x-\cos x),$$

故

$$\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

注　两次分部积分后，又回到原来的积分，且两式系数不同，可移项得到积分结果，这是在分部积分中一种常用的技巧. 除了三角函数和指数函数乘积的不定积分可以采取如此方法，下面的题目也可以.

****例 26**　求：（1）$\int \sec^3 x dx$；　　　　（2）$\int \cos(\ln x)dx$.

解　（1）
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \int \sec x d(\tan x)=\sec x\tan x-\int \tan x\cdot\sec x\tan x dx\\ &=\sec x\tan x-\int \sec x(\sec^2 x-1)dx\\ &=\sec x\tan x-\int \sec^3 x dx+\int \sec x dx\\ &=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|-\int \sec^3 x dx.\end{aligned}$$

将上式右端的 $\int \sec^3 x dx$ 移到等号的左端，得

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C.$$

(2) $$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=x\cos(\ln x)-\int x\cdot\left[-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$$
$$=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$$
$$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$$

在求不定积分的过程中往往要兼用换元法和分部积分法.

例 27　求 $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

故

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int te^t\mathrm{d}t=2e^t(t-1)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

例 28　求不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

解　令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，

$$\int\ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int\ln(1+t)\mathrm{d}(t^2)=t^2\ln(1+t)-\int t^2\mathrm{d}[\ln(1+t)]$$
$$=t^2\ln(1+t)-\int\frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$=t^2\ln(1+t)-\int(t-1)\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$
$$=t^2\ln(1+t)-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)+C$$
$$=(x-1)\ln(1+\sqrt{x})+\sqrt{x}-\frac{x}{2}+C.$$

习题 3-2

1. 在下列各式等号的右端加上适当的系数，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(2x)$；　　(2) $\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(5x-2)$；

(3) $x\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(x^3)$；　　(4) $x\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(3x^2)$；

(5) $x\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(3-2x^2)$；　　(6) $x^3\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(5x^4-2)$；

(7) $e^{2x}\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(e^{2x})$；　　(8) $e^{-\frac{x}{3}}\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}(1+e^{-\frac{x}{3}})$；

(9) $\sin\frac{3}{4}x\mathrm{d}x=$________ $\mathrm{d}\left(\cos\frac{3}{4}x\right)$；　　(10) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=$________ $\mathrm{d}(3\ln|x|)$；

(11) $\frac{\mathrm{d}x}{x}=$________ $\mathrm{d}(3-5\ln|x|)$；　　(12) $\frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}=$________ $\mathrm{d}(\arctan 3x)$.

2. 用换元法求下列不定积分：

(1) $\int\sin 3x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\cos 5x\mathrm{d}x$；

(3) $\int \mathrm{e}^{2-3x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x$；　　(6) $\int\frac{1}{\sqrt{2-3x}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int(1-3x)^9\mathrm{d}x$；　　(8) $\int\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$；

(9) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　　(10) $\int x^2\sin x^3\mathrm{d}x$；

(11) $\int\frac{x}{3-2x^2}\mathrm{d}x$；　　(12) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　　(14) $\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$；

(15) $\int\frac{\sin(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$；　　(16) $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$；

(17) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$；　　(18) $\int\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$；

(19) $\int\sin^3 x\mathrm{d}x$；　　(20) $\int\cos^4 x\mathrm{d}x$；

(21) $\int\frac{1}{4+9x^2}\mathrm{d}x$；　　(22) $\int\frac{1}{5-x}\mathrm{d}x$；

(23) $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(24) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(25) $\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}x$；　　(26) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\mathrm{d}x$；

(27) $\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；　　(28) $\int\frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$；

(29) $\int\frac{1}{x^2+3x+4}\mathrm{d}x$；　　(30) $\int\frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$；

(31) $\int\frac{6x}{2+3x}\mathrm{d}x$；　　(32) $\int\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$；

(33) $\int \mathrm{e}^x\sin \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(34) $\int \mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$；

(35) $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；　　(36) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；

(37) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$；　(38) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(39) $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}dx$；　(40) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(41) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$；　(42) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$；

(43) $\int \sin3x\sin5x dx$；　(44) $\int \sin3x\cos4x dx$；

(45) $\int x(5x-1)^{15}dx$；　(46) $\int \frac{x}{(3-x)^7}dx$；

(47) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$；　(48) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$；

(49) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2-x}}dx$；　(50) $\int \frac{1}{1-\sqrt{2x+1}}dx$；

(51) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$；　(52) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$；

(53) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$；　(54) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$.

*3. 用换元法计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx$；　(2) $\int \frac{x+2}{x^2+3x+4}dx$；

(3) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$；　(4) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$；

(5) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$；　(6) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$；

(7) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$；　(8) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$；

(9) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}dx$；　(10) $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$.

4. 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int x\ln x dx$；　(2) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$；

(3) $\int xe^{-x}dx$；　(4) $\int x^2e^{2x}dx$；

(5) $\int x\sin x dx$；　(6) $\int x\sin2x dx$；

(7) $\int x^2\cos x dx$；　(8) $\int x\cos3x dx$；

(9) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$；　　(10) $\int (x-1)5^x dx$；

(11) $\int \arcsin x dx$；　　(12) $\int \arctan\sqrt{x}\, dx$；

(13) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$；　　(14) $\int (\arcsin x)^2 dx$；

(15) $\int e^{-x}\sin x dx$；　　(16) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$；

(17) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$；　　(18) $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$；

(19) $\int x\sin^2 x dx$；　　(20) $\int e^{-x}\sin 2x dx$；

(21) $\int \ln(1+\sqrt[3]{x})dx$；　　(22) $\int \sin(\ln x)dx$.

5. 已知$f(x)$的一个原函数是e^{-x^2}，求$\int xf'(x)dx$.

6. 利用分部积分法计算$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx$.

*第三节　有理函数的不定积分

[课前导读]

这一节要讲述有理函数(可化为有理函数)的积分，在此之前我们需要一些多项式的知识. 对积分要求较高的专业可选学此节内容.

有理函数：有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数，例如

$$\frac{x-1}{1+x^2},\ \frac{x^3}{1-x},\ \frac{x^2}{x^3-x^2+x-1}.$$

都是有理函数，其中$\frac{x-1}{1+x^2}$，$\frac{x^2}{x^3-x^2+x-1}$称为真分式，$\frac{x^3}{1-x^2}$称为假分式. 利用多项式的除法，可将一个假分式化为一个多项式和一个真分式之和的形式，比如

$$\frac{x^3}{1-x}=\frac{x^3-1+1}{1-x}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)+1}{1-x}=-(x^2+x+1)+\frac{1}{1-x}.$$

最简分式：下列四类分式称为最简分式，其中 n 为大于或等于 2 的正整数，A、M、N、a、p、q 均为常数，且 x^2+px+q 为二次质因式.

(1) $\frac{A}{x-a}$；　(2) $\frac{A}{(x-a)^n}$；　(3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$；　(4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

一、真分式的分解

如果一个真分式的分母不是质因式，我们总可以通过因式分解把它写成一次因式或二

次质因式的乘积，进而把真分式表示成最简分式的和.

例 1　把分式$\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$分解为最简分式之和.

解　$\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}=\dfrac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$,
其中 A 和 B 为待定的系数.

比较分子部分 $x+3=A(x-3)+B(x-2)=(A+B)x-(3A+2B)$，得

$$\begin{cases}A+B=1,\\-(3A+2B)=3,\end{cases}$$

故 $A=-5$，$B=6$. 因此

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=-\frac{5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

例 2　把分式$\dfrac{1}{x(x-1)^2}$分解为最简分式之和.

解　$\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}=\dfrac{A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)}{x(x-1)^2}$,

比较分子部分　　$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$,
令 $x=0$，得 $A=1$；令 $x=1$，得 $B=1$；将 $A=1$，$B=1$ 及 $x=2$ 代入上式得 $C=-1$.
因此

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

例 3　分解有理分式 $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解　设$\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+2x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$,

从而得

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

整理得　　$1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A$,

即 $A+2B=0$，$B+2C=0$，$A+C=1$,

计算得 $A=\dfrac{4}{5}$，$B=-\dfrac{2}{5}$，$C=\dfrac{1}{5}$,

从而

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

二、有理函数的不定积分

例 4　求 $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解　由于$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=-\frac{5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$，故

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}dx=-5\int\frac{dx}{x-2}+6\int\frac{dx}{x-3}=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

例 5　求$\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$.

解　由于$x-2=\frac{1}{2}(2x+2)-3$，故

$$\frac{x-2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-3\cdot\frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}dx&=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-3\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

例 6　求$\int\frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

解　由于$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$，

故

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x-1)^2}&=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\int\frac{1}{x-1}dx\\&=\ln|x|-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

例 7　求$\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$.

解　由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}&=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1+2x}+\left(-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx&=\frac{2}{5}\int\frac{2}{1+2x}dx-\frac{1}{5}\int\frac{2x}{1+x^2}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C.\end{aligned}$$

三、三角函数的有理式的不定积分

例 8　求不定积分$\int\frac{1}{3\sin x+4\cos x}dx$.

解　令 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$dx=\frac{2du}{1+u^2}$，

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{4+6t-4t^2}\\
&=\int\frac{dt}{(2t+1)(2-t)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{2}{2t+1}+\frac{1}{2-t}\right)dt\\
&=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2t+1}{2-t}\right|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{2-\tan\frac{x}{2}}\right|+C.
\end{aligned}$$

这里所用的变量代换 $u=\tan\frac{x}{2}$ 对三角函数的有理式都可以应用，因此也称它为万能置换.

例 9　求不定积分 $\int\frac{1}{\sin^4x}dx$.

解一　利用万能置换公式，

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx=\frac{2}{1+u^2}du,$$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int\frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}du=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}\right)+C\\
&=-\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+C.
\end{aligned}$$

解二　修改万能置换公式，令 $u=\tan x$，

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ dx=\frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\text{原式}=\int\frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}du=\int\frac{1+u^2}{u^4}du=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3}\cot^3x-\cot x+C.$$

解三　不用万能置换公式，

$$\text{原式}=\int\csc^2x(1+\cot^2x)dx=\int\csc^2x\,dx+\int\cot^2x\csc^2x\,dx=-\frac{1}{3}\cot^3x-\cot x+C.$$

比较以上三种解法，便知万能置换不一定是最佳方法，故三角函数有理式的计算中先考虑其他手段，不得已才用万能置换.

四、可化为有理函数的简单无理根式的不定积分

考虑下列形式的简单无理根式的不定积分：

$$\int f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x.$$

令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$，这样上述形式的简单无理根式的不定积分可化为有理函数的不定积分.

例 10 求$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，则$t^2=\frac{1+x}{x}$，即$x=\frac{1}{t^2-1}$，$\mathrm{d}x=-\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x&=\int(t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t\\&=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2t+2\ln(t+1)-\ln|t^2-1|+C\\&=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right)+\ln|x|+C.\end{aligned}$$

除了上述基本换元形式外，应根据所给被积函数的特点，进行适当的变量替换，转化为便于求不定积分的形式.

例 11 求$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{\mathrm{e}^x+1}=t$，则$x=\ln(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-1}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-1}\mathrm{d}(t-1)-\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}(t+1)\\&=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}\right|+C.\end{aligned}$$

习题 3-3

1. 求下列有理函数的积分.

(1) $\int\frac{1}{x(x-3)}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{1}{x^2-4}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{2x+1}{x^2+2x-15}\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{1}{4x^2+4x+10}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{2x-5}{(x-1)^2(x+2)}\mathrm{d}x$；　(10) $\int \frac{x^3+2x^2+12x+11}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{x^2+x}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$；　(12) $\int \frac{x^4}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

2. 求下列三角函数有理式的积分.

(1) $\int \frac{1}{3+5\cos x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \cos^5 x\mathrm{d}x$；

(3) $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \cos 4x\cos 6x\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{\sin x}{\sin^2 x+5\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　(10) $\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$.

3. 求下列无理函数的不定积分.

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a\neq b)$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$；　(4) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$；　(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

第四节　定积分的概念与性质

[课前导读]

本章要介绍的定积分起源于求图形的面积和体积等实际问题. 古希腊的阿基米德用“穷竭法”，我国的刘徽用“割圆术”，都曾计算过一些几何体的面积和体积，这些均为定积分的雏形. 直到 17 世纪中叶，牛顿和莱布尼茨先后提出了定积分的概念，并发现了积分与微分之间的内在联系，给出了计算定积分的一般方法，从而使定积分成为解决有关实际问题的有力工具，并使各自独立的微分学与积分学联系在一起，构成完整的理论体系——微积分学.

一、实例分析

在平面几何中，我们会计算三角形、矩形、梯形等由直线围成的图形的面积，以及圆、椭圆、扇形等特殊曲线所围成图形的面积.

现在我们来计算由曲线 $y=x^2$、x 轴和直线 $x=1$ 所围平面图形的面积(见图 3-2)，这样的图形称为曲边梯形.

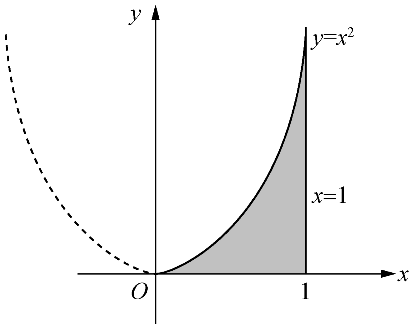


图 3-2

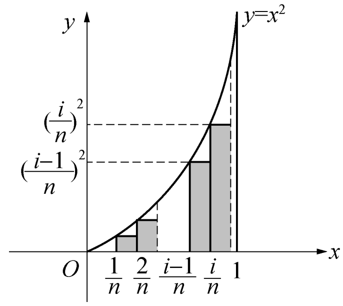


图 3-3

将区间[0，1]作 n 等分，分点分别为$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}$，过这些分点作平行于 y 轴的直线，把平面图形分割成 n 个小窄条，每个小窄条都是小的曲边梯形，但是我们仍无法用初等数学的方法求得它们的面积. 现在分别以 $y=x^2$ 分点上的值

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{i}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

为高，以$\frac{1}{n}$为底作 n 个小矩形，则可用每个小矩形的面积近似替代作为对应的小窄边梯形的面积 $\Delta A_i(i=1,2,3,\cdots,n)$(见图 3-3)，即

$$\Delta A_1\approx\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0}{n}\right)^2,\ \Delta A_2\approx\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \Delta A_i\approx\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \Delta A_n\approx\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

于是，整个曲边梯形的面积 A 的近似值为

$$\begin{aligned}A&=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_i+\cdots+\Delta A_n\\&\approx\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).\end{aligned}$$

当这些分点无限增加，即 $n\to\infty$ 时，这个近似值的极限就是曲边梯形面积的精确值

$$\begin{aligned}A&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

一般地，设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负且连续，由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b$ 和 $y=0$ 四条线围成的平面图形 $AabB$ 称为**曲边梯形**（见图 3-4）. 为求其面积，可采取以下步骤.

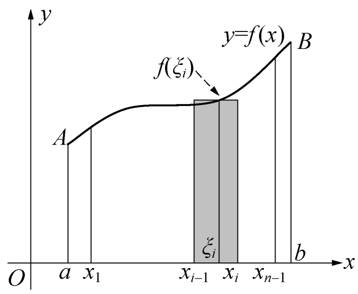




图 3-4

第一步"分割". 在区间 $[a, b]$ 上任意插入 $n-1$ 分点 x_1，x_2，…，x_{n-1}，将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，…，$[x_{i-1}, x_i]$，…，$[x_{n-1}, x_n]$，其中 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，且每个小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（$i=1, 2, \cdots, n$）；相应地，把曲边梯形 $AabB$ 分为 n 个小曲边梯形.

第二步"以直代曲近似". 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内任取一点 ξ_i（$i=1, 2, \cdots, n$），并以 Δx_i 为底边，$f(\xi_i)$ 为高作小矩形，其面积用 ΔS_i 表示，则有 $\Delta S_i=f(\xi_i)\Delta x_i$，且当 Δx_i 很小时，有 $\Delta S_i\approx\Delta A_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）.

第三步"求和". 设小矩形面积的总和为 S_n，则 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，此为曲边梯形面积的近似值.

第四步"取极限". 如果用 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$ 表示所有小区间中的最大区间长度，当分点数 n 无限增大且 λ 趋于零时，S_n 便趋近于曲边梯形 $AabB$ 的面积 S，即

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由上述曲边梯形的求解过程，可以给出定积分的定义.

二、定积分的定义

定义　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，在区间 $[a, b]$ 上任意插入 $n-1$ 个点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b,$$

得到 n 个小区间 $[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，…，$[x_{i-1}, x_i]$，…，$[x_{n-1}, x_n]$，对应的区间长度分别为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\ \cdots,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ \cdots,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1},$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\Delta x_i|\}$，在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$（$i=1, 2, \cdots, n$）上任取一点 ξ_i（$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$）（$i=1, 2, \cdots, n$），作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，如果不论分法如何、$\xi_i$ 如何选取，总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I\ (I\text{ 为常数}),$$

则称 I 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**定积分**（简称积分），记作

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

其中，x 称为**积分变量**，$[a, b]$称为**积分区间**，a，b 分别称为积分的**下限**和**上限**，$f(x)$为**被积函数**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为**被积表达式**.

对于定积分的定义，还应注意以下几点：

（1）在上述定义中，分法是任意的，ξ_i 的选取是任意的.

（2）定积分是一种和式的极限，其值是一个实数，它的大小仅与被积函数 $f(x)$ 和积分区间$[a, b]$有关，而与积分变量的记法无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

如果函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的定积分存在，则称 $f(x)$ 在$[a, b]$上可积. 那么在什么条件下，$f(x)$ 在$[a, b]$上可积呢?

定理 1　若函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a, b]$上可积.（连续⇒可积）

定理 2　若函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在$[a, b]$上可积.

注　按定积分定义，若函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上可积，则 $f(x)$ 在$[a, b]$上有界.

***例 1**　利用定积分的定义，计算定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解　由于 e^x 为$[0, 1]$上的连续函数，故其定积分存在. 因而可以把区间$[0, 1]$分为 n 等份，即 $x_i=\dfrac{i}{n}$，$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}(i=1, 2, \cdots, n)$.

取 $\xi_i=x_i=\dfrac{i}{n}(i=1, 2, \cdots, n)$. 由定积分的定义得

$$\begin{aligned}S=\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(1-\mathrm{e}^{\frac{n}{n}})}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(\mathrm{e}-1)}{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}}=\mathrm{e}-1,\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$.

该例表明，用定义计算定积分，将积分区间采用等距离划分较为简便，但即使如此，其计算过程仍很烦琐，所以应寻求其他计算定积分的简便方法.

三、定积分的几何意义

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

若在 $[a, b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值表示以 $y=f(x)$ 为曲边，与直线 $x=a$、$x=b$、$y=0$ 所围曲边梯形的面积（见图 3-5）；

若在 $[a, b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为负值，其绝对值表示以 $y=f(x)$ 为曲边，与直线 $x=a$、$x=b$、$y=0$ 所围曲边梯形的面积（见图 3-6）；

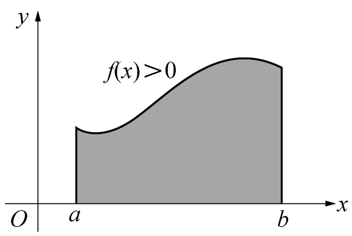


图 3-5

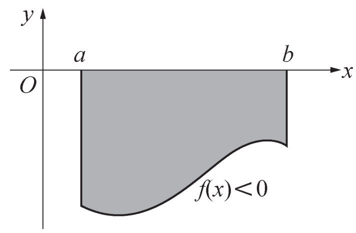


图 3-6

若在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 有正有负，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$、$x=a$、$x=b$、$y=0$ 所围图形在 x 轴上方的面积减去在 x 轴下方的面积（见图 3-7）.

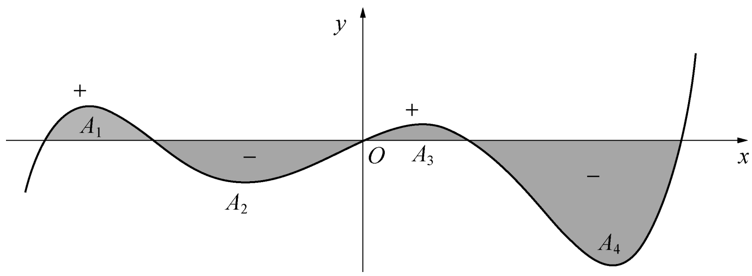


图 3-7

例 2　由定积分的几何意义，求

$$\int_1^2 (x-3)\,\mathrm{d}x.$$

解　由于在区间 $[1, 2]$ 上，$f(x)=x-3<0$，因此按照定积分的几何意义，该定积分表示由曲边 $y=x-3$ 和直线 $x=1$，$x=2$，$y=0$ 所围图形面积的负值. 该图形是底为 1 和 2、高为 1 的梯形（见图 3-8），其面积为 $\frac{1}{2}(1+2)\cdot 1=\frac{3}{2}$，故

$$\int_1^2 (x-3)\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}.$$

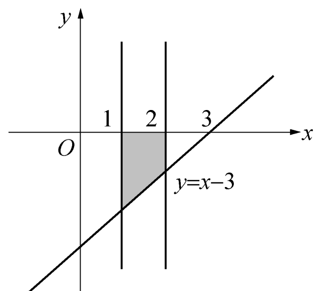


图 3-8

*例 3　利用定积分表示极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\cos\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\cos\frac{n-1}{n}+\cos 1\right).$$

解　原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$.

易见，若取 $x_i=\frac{i}{n}$，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$\xi_i=\frac{i}{n}\in[x_{i-1},x_i]$，原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\cos\xi_i\Delta x_i$.

由此可见，被积函数应取为 $f(x)=x\cos x$. 注意到 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，因而是可积的. 故有

$$\text{原极限}=\pi\int_0^1 x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

注　今后可直接计算出上述积分结果为 $\pi(\sin 1+\cos 1-1)$.

四、定积分的性质

按定积分的定义，即通过积分和的极限求定积分是十分困难的，必须寻求定积分的有效计算方法. 下面介绍的定积分的基本性质有助于计算定积分，也有助于理解定积分. 假定函数在所讨论的区间上可积，则有以下性质.

在定积分定义中 $a<b$，这一限制给定积分的应用带来不便，因此规定：

（1）$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$；

（2）设 $a>b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

1. 被积函数性质

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积；（$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 也存在.）

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的任何子区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上也可积.（$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ 也存在，其中 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$.）

（3）$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

2. 线性性质

若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$、$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 均存在，则 $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x$ 也存在，且 $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，其中 α,β 是常数.

3. 区间的有限可加性

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

只要 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$、$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$、$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 均存在，无论 a、b、c 所对应的位置如何，上式恒成立.

注　当 c 不在 $[a,\ b]$ 上时，如 $c<a<b$，则 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，因此也有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 保序性

设 $f(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a,\ b]$，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$、$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 均存在，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 1　设 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[a,\ b]$，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 均存在，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

推论 2　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

证明　由 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$，$x\in[a,\ b]$，得

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

5. 估值性质

设 $M=\max\limits_{[a,\ b]} f(x)$，$m=\min\limits_{[a,\ b]} f(x)$，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

证明　由 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,\ b]$，得

$$m(b-a)=\int_a^b m\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\,\mathrm{d}x=M(b-a),$$

即 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

6. 积分中值定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$，使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有最大值 M 与最小值 m. 故由估值性质有 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$，从而有

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M,$$

即 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 介于 $f(x)$ 的最小值和最大值之间. 由连续函数的介值定理，至少有一点 ξ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$，使下式成立：

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

中值定理表明平均值可以在某一点取得. 其几何意义如下.

设 $f(x)\geqslant 0$, 则由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积等于以区间 $[a, b]$ 为底、以 $f(\xi)$ 为高的矩形 $abcd$ 的面积(见图 3-9).

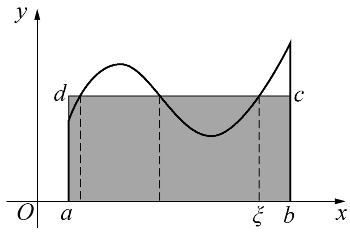


图 3-9

例 4　不计算积分, 试比较下面两个积分值的大小: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

解　当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, 有 $x\geqslant\sin x$, 故由保序性得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x.$$

例 5　不计算积分, 比较积分值 $\int_0^{-2} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{-2} x\mathrm{d}x$ 的大小.

解　令 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$, $x\in[-2, 0]$.

因为 $f(x)\geqslant 0$, 所以 $\int_{-2}^0 (\mathrm{e}^x-x)\mathrm{d}x\geqslant 0$, 从而 $\int_{-2}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\geqslant\int_{-2}^0 x\mathrm{d}x$,

于是

$$\int_0^{-2} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{-2} x\mathrm{d}x.$$

例 6　估计积分 $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x$ 的值.

解　$f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}$, $x\in[0, \pi]$, 因为 $0\leqslant\sin^3 x\leqslant 1$, 所以 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{3+\sin^3 x}\leqslant\frac{1}{3}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi} \frac{1}{3}\mathrm{d}x,$$

于是

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

例 7　试求 $y=x^2$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足积分中值定理的 ξ 的值.

解　由定积分的几何意义可知, 由曲线 $y=x^2$, x 轴和直线 $x=1$ 所围的图形面积即为 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 的值. 从引例可知, $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. 再由积分中值定理得

$$\xi^2\cdot(1-0)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

于是

$$\xi=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

习题 3-4

*1. 利用定积分的定义计算下列定积分：

（1）$\int_0^4 (2x+3)\,\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$（提示：把区间 n 等分，取 ξ_i 为小区间右端点，并注意到 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$）.

*2. 将和式极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$ 表示成定积分.

3. 利用定积分的几何意义，求下列各式的值：

（1）$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$；　　（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$；

4. 试用定积分表示如图 3-10 所示的平面图形的面积.

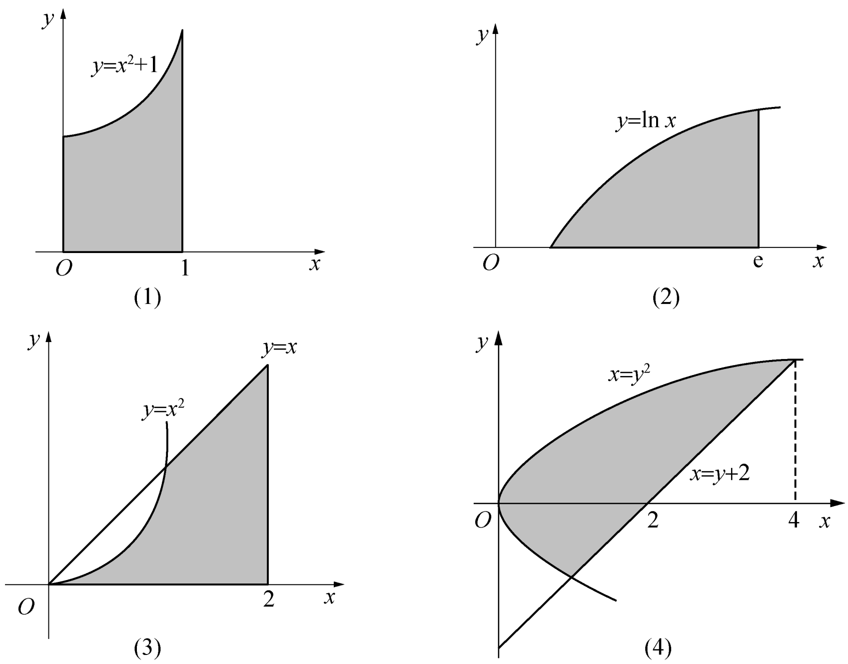


图 3-10

5. 不计算积分，直接比较下列各组积分值的大小.

（1）$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_2^4 x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_2^4 x^2\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　　（4）$\int_0^{-1} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{-1} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$；　　（6）$\int_{0}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$；

（7）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x$；　　（8）$\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

6. 估计下列定积分值的范围：

（1）$\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^4 x)\mathrm{d}x$.

7. 证明不等式 $\int_{2}^{3}\sqrt{x^2-x}\,\mathrm{d}x\geqslant\sqrt{2}$.

8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

*9. 曲边梯形由曲线 $x=g(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 和 y 轴所围（见图 3-11），试用定积分定义导出其面积的定积分表示式.

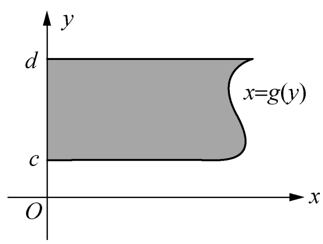


图 3-11

第五节　微积分基本定理

［课前导读］

积分学中要解决两个问题：第一个问题是原函数的求法问题，前文已经对它做了讨论；第二个问题就是定积分的计算问题. 如果按定积分的定义来计算定积分，那将是十分困难的. 因此寻求一种计算定积分的有效方法便成为积分学发展的关键. 我们知道，不定积分作为原函数的概念与定积分作为积分和的极限的概念是完全不相干的两个概念. 但是，牛顿和莱布尼茨不仅发现而且找到了这两个概念之间存在的深刻的内在联系，即所谓的“微积分基本定理”，并由此巧妙地开辟了求定积分的新途径——牛顿-莱布尼茨公式，从而使积分学与微分学一起构成变量数学的基础学科——微积分学. 牛顿和莱布尼茨也因此作为微积分学的奠基人而载入史册.

一、变速直线运动的路程

设物体做直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间间隔$[0, T]$上 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant 0$. 对于等速直线运动，有公式：路程=速度×时间，现在速度是随着时间变化的变量，因此不能直接按等速直线运动的路径公式来计算.

将时间$[0, T]$任意地分成n小段$[t_{i-1}, t_i]$（其中$i=1, 2, \cdots, n$，$t_0=0$，$t_n=T$），任取$\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$(i=1, 2, \cdots, n)$，则$\Delta S_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i (i=1, 2, \cdots, n)$，$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，因此得到变速（$v=v(t)$，$t\in[0, T]$）直线运动的路程

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i=\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t;$$

另一方面，这段路程又可通过位置函数$S(t)$在时间$[0, T]$上的增量来表示：$S(T)-S(0)$，因此有$\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t=S(T)-S(0)$，且$S'(t)=v(t)$，从而有

$$\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T S'(t)\,\mathrm{d}t=S(t)\Big|_0^T=\left[\int v(t)\,\mathrm{d}t\right]\Big|_0^T.$$

此公式揭示了速度函数的定积分和不定积分的关系. 这是一种偶然的巧合，还是一种具有一般意义的计算公式呢？答案是肯定的. 下面就来推导一般的结果，通过求原函数的方法来计算定积分，该结果称为微积分基本定理.

二、积分上限函数

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，x为$[a, b]$上的任意一点（见图 3-12），则积分$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$存在，这里上限$x$是$[a, b]$上的任意取定的一点，当$x$在$[a, b]$上变化时，$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$的值也随之变化. 由于积分值与积分变量用什么字母表示无关，故原来的$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$用$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$表示更妥，故$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$为$[a, b]$上变量$x$的函数，称为$f(x)$的**积分上限的函数**. 记为$\varPhi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$(a\leqslant x\leqslant b)$. 同理，$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$也是$x$的函数$(a\leqslant x\leqslant b)$，称为$f(x)$的**积分下限的函数**.

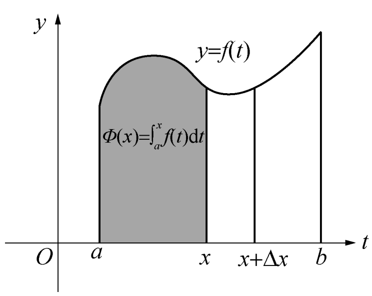


图 3-12

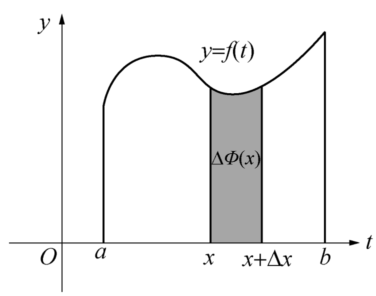


图 3-13

积分上限函数

由定积分的几何意义，可以看到$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$表示区间$[a, b]$上整块曲边梯形的面积，而$\varPhi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$表示区间$[a, x]$上对应的曲边梯形的面积. 对于$\varPhi(x)$，有下列性质.

定理 1　若函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，则$\varPhi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$在$[a, b]$上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x).$$

证明　考虑 $\Delta\Phi(x)$ 并利用积分中值定理（见图 3-13），有

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x,$$

其中 ξ 介于 x、$x+\Delta x$ 之间. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x),$$

即
$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x).$$

注　从定理的结论可以看出，$\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，因此有以下定理.

定理 2　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，即

$$\Phi'(x)=f(x),\ x\in[a,b].$$

定理 2 的意义在于：

（1）连续函数的原函数是存在的，这样就解决了不定积分中连续函数的原函数的存在的证明；

（2）指出了获得连续函数的原函数的具体方法.

推论　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\Phi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t$，$a\leqslant a(x)<b(x)\leqslant b$，$a(x)$，$b(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x).$$

证明　$\Phi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t=\int_{a(x)}^{c}f(t)\mathrm{d}t+\int_c^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t=\int_c^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t-\int_c^{a(x)}f(t)\mathrm{d}t$，其中 $c\in[a,b]$，考虑 $F(x)=\int_c^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t=\int_c^u f(t)\mathrm{d}t\Big|_{u=b(x)}$，则

$$F'(x)=f'(u)\Big|_{u=b(x)}\cdot b'(x)=f[b(x)]b'(x),$$

因此，
$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x).$$

特别地，若 $a(x)\equiv a\in\mathbf{R}$，则

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t=f[b(x)]b'(x).$$

若 $b(x)\equiv b\in\mathbf{R}$，则

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b}f(t)\mathrm{d}t=-f[a(x)]a'(x).$$

例 1　求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x\cos^2t\mathrm{d}t\right)$.

解　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x\cos^2t\mathrm{d}t\right)=\cos^2x.$

例 2　求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{x^3} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)$.

解　根据定理 2 的推论，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{x^3} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)=\mathrm{e}^{(x^3)^2}\cdot(x^3)'=3x^2\mathrm{e}^{x^6}\cdot$$

例 3　求下列函数的导数：

（1）$y=\int_0^{x^2}\sin(t+1)\mathrm{d}t$；　　（2）$y=\int_{x^3}^2\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t(x>0)$.

解　（1）$y'=\sin(x^2+1)\cdot(x^2)'=2x\sin(x^2+1)$；

（2）$y'=-\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3}\right)\cdot(x^3)'=-3\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x}$.

例 4　设$f(x)$是连续函数，试求以下函数的导数.

（1）$F(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\mathrm{e}^{f(t)}\mathrm{d}t$；　　（2）$F(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t$.

解　（1）$F'(x)=\mathrm{e}^{f(\sin x)}\cos x+\mathrm{e}^{f(\cos x)}\sin x$.

（2）因为 $F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，所以 $F'(x)=xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

例 5　设函数 $y=f(x)$由方程$\int_0^{y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_x^0\sin t\mathrm{d}t=0$ 所确定. 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　在方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^0\sin t\mathrm{d}t\right)=0,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_0^{y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^0\sin t\mathrm{d}t\right)=0,$$

即

$$\mathrm{e}^{y^4}\cdot(2y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(-\sin x)=0,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin x}{2y\mathrm{e}^{y^4}}.$$

例 6　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

分析： 这是$\dfrac{0}{0}$型不定式，应用洛必达法则.

解　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\cos x}^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=-\mathrm{e}^{-\cos^2x}\cdot(\cos x)'=\sin x\cdot\mathrm{e}^{-\cos^2x}$,

故　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-(-\sin x)\mathrm{e}^{-\cos^2x}}{2x}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

三、微积分基本定理

定理 3(牛顿–莱布尼茨公式)　若函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

证明　已知 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，故 $F(x) - \Phi(x) = C$，即 $F(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = C$. 令 $x = a$，则 $F(a) = C$，即

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

因此，令 $x = b$，则有 $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

这个公式揭示了不定积分与定积分之间的关系. 由于我们已经熟悉了不定积分的计算方法，因此，利用该公式计算定积分将会大大降低计算定积分的难度. 由于它的重要性，故也称其为**微积分基本定理**.

例 7　求定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解　e^x 的一个原函数是 e^x，由牛顿–莱布尼茨公式得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1.$$

注　上一节曾经用定积分的定义求过此积分的值. 很明显，用牛顿–莱布尼茨公式计算简便得多.

例 8　求 $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解　当 $x<0$ 时，$y = \frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $y = \ln|x|$，

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

例 9　设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 5, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解　如图 3–14 所示，在 $[1, 2]$ 上规定：当 $x = 1$ 时，$f(x) = 5$，则由定积分性质得

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 5\,\mathrm{d}x = 6.$$

例 10　计算 $\int_0^1 |2x-1|\,\mathrm{d}x$.

解　因为 $|2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$（见图 3–15），

所以

$$\int_0^1 |2x-1|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)dx=(x-x^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+(x^2-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}.$$

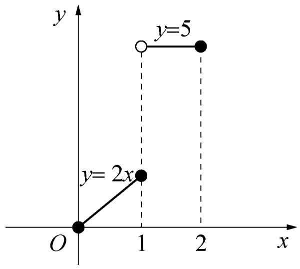


图 3-14

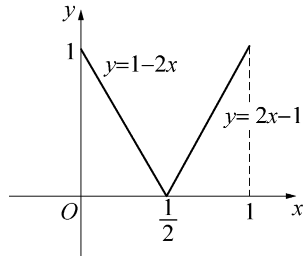


图 3-15

例 11　求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\cos^2x}\,dx$.

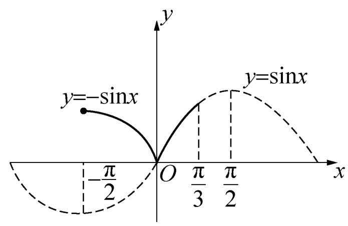


图 3-16

解　
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\cos^2x}\,dx&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sin^2x}\,dx\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}|\sin x|dx\\&=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx\\&=\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{2}\text{(见图 3-16)}.\end{aligned}$$

例 12　求 $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx$.

解　由图 3-17 可知

$$f(x)=\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

所以 $\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_0^1 xdx+\int_1^2x^2dx=\frac{11}{2}.$

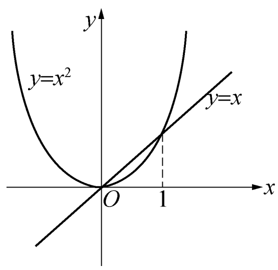


图 3-17

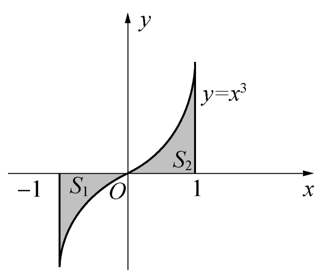


图 3-18

例 13　计算由曲线 $y=x^3$ 在 $x=-1$、$x=1$ 之间及 x 轴所围成的图形的面积.

解　根据定积分的几何意义(见图 3-18)，所求面积为

$$S=\int_{-1}^{1}|x^3|dx=\int_{-1}^{0}(-x^3)dx+\int_0^1x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

例 14　汽车以每小时 36 km 速度行驶，到某处需要减速停车. 设汽车以等加速度 $a=-5\ \mathrm{m/s^2}$ 刹车. 问：从开始刹车到停车，汽车驶过了多少距离？

解　首先要算出从开始刹车到停车经过的时间. 设开始刹车的时刻为 $t=0$，此时汽车速度为 $v_0=36\ \mathrm{km/h}=\dfrac{36\times 1\ 000}{3\ 600}\ \mathrm{m/s}=10\ \mathrm{m/s}$.

刹车后汽车减速行驶，其速度为 $v(t)=v_0+at=10-5t$.

当汽车停住时，速度 $v(t)=0$，故由

$$v(t)=10-5t=0\Rightarrow t=\frac{10}{5}=2\ \mathrm{s}.$$

于是这段时间内，汽车所驶过的距离为

$$s=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^2(10-5t)\mathrm{d}t=\left(10t-5\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^2=10\ \mathrm{m},$$

即在刹车后，汽车需驶过 10 m 才能停住.

***例 15**　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}$.

取函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ 存在，故

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i}\Delta x_i.$$

对 $[0,1]$ n 等分：$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

习题 3-5

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_x^b f(u)\mathrm{d}u$ 是 x 的函数还是 t 或 u 的函数？它们的导数存在吗？如果存在，等于什么？

2. 求下列函数的导数：

（1）$y=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2-t}\mathrm{d}t$；　　（2）$y=\int_0^{\sqrt{x}}\cos t^2\mathrm{d}t$；

（3）$y=\int_{x^2}^5\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$；　　（4）$y=\int_{2x}^{x^2}\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$；

（5）$y=\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\ln(1+t^6)\mathrm{d}t$；　　（6）$y=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

3. 设 $g(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^2-1} g(t)\mathrm{d}t=-x$，求 $g(3)$.

4. 设 $f(x)=\int_{-x}^{\sin x}\arctan(1+t^2)\mathrm{d}t$，求 $f'(0)$.

5. 求由参数表达式 $x=\int_0^t \sin u^2\mathrm{d}u$，$y=\int_0^t \cos u^2\mathrm{d}u$ 所确定的函数对 x 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6. 设 $y(x)$ 是由方程 $\int_0^y \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+\int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7. 求函数 $f(x)=\int_0^x (1+t)\arctan t\mathrm{d}t$ 的极小值.

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t\cos t\mathrm{d}t}{1-\cos x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t}{\ln(1+x)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x (\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

9. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}$（$g$ 为常量）；

(2) $\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^2 (4-2x)(4-x^2)\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$；

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$；

(10) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$；

(11) $\int_{-3}^3 (|x-1|+|x-2|)\mathrm{d}x$；

(12) $\int_{-3}^2 \min\{1,\mathrm{e}^x\}\mathrm{d}x$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi,\end{cases}$ 求 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

11. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{\int_0^{x^2}\cos x^2\mathrm{d}x}{2x^2}, & x>0,\end{cases}$ 求(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；(2) $f(x)$在$x=0$处连续吗？为什么？

12. 已知$f'(x)\cdot\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=50$，且$f(0)=0$，试求$f(x)$.

13. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$f(x)>0$. 证明函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

第六节　定积分的换元法和分部法

[课前导读]

牛顿–莱布尼茨公式告诉我们，计算连续函数$f(x)$的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的有效简便方法是计算$f(x)$的原函数$F(x)$在$[a,b]$上的增量$F(b)-F(a)$. 只要求出原函数$F(x)$，就能求得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\Big|_a^b.$$

这说明不定积分的计算与定积分的计算有着密切关系. 很自然地想到，在定积分计算中，也可以尝试换元法与分部法.

一、定积分的换元法

在不定积分中，我们已掌握了换元法和分部积分法. 现在我们来计算定积分

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0).$$

令$x=a\sin t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$t=\arcsin\frac{x}{a},\ \sin t=\frac{x}{a},\ \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x&=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C\end{aligned}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C,$$

因此 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi a^2}{4}.$

显然，我们已有能力用不定积分的换元法解决该类问题了，但其过程比较复杂，要经历换元、求原函数、回代、取值四个过程. 有没有比较简单的方法呢？让我们来研究一下定积分的换元法.

定理　设

（1）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

（2）$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上单调且具有连续导数，且 $R_\varphi=[a,b]$；

（3）t 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上变化时，$\varphi(t)=x$ 在 $[a,b]$ 上变化，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

***证明**　由条件(1)函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $\int_a^b f(x)\,dx$ 存在，且有原函数 $F(x)$ 存在. 由微积分基本公式，得 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

因为 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上连续，故 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$ 存在，且在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有原函数 $\Phi(t)$. 由微积分基本公式，得 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$.

现只要证明 $F(b)-F(a)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$.

由于 $\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，而 $\Phi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，故

$\Phi(t)=F[\varphi(t)]+C$，即 $\Phi(\beta)=F[\varphi(\beta)]+C_0$，$\Phi(\alpha)=F[\varphi(\alpha)]+C_0$，因此

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

注　（1）作 $x=\varphi(t)$ 时，相应的积分上下限也应变作新变量的上下限.

（2）求出新变量的原函数后，不必回代，只需把新变量的上下限直接代入计算.

我们可以用定积分的换元法来计算刚才的定积分.

令 $x=a\sin t$，则 $dx=d(a\sin t)=a\cos t\,dt$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

例 1　计算 $\int_0^1(2x-1)^{2\,016}dx$.

解　令 $t=2x-1$，则 $dt=2dx$，$x=0\Rightarrow t=-1$，$x=1\Rightarrow t=1$，

$$\int_0^1(2x-1)^{2\,016}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 t^{2\,016}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{2\,017}}{2\,017}\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2\,017}.$$

注 本例中，如果不明显写出新变量 t，则定积分的上、下限就不要变，重新计算如下.

$$\int_0^1 (2x-1)^{2\,016}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x-1)^{2\,016}\mathrm{d}(2x-1)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x-1)^{2\,017}}{2017}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2\,017}.$$

例 2 求定积分 $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^e \ln^2 x\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e = \frac{1}{3}(\ln^3 e - \ln^3 1) = \frac{1}{3}$.

例 3 求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $\sqrt{\cos x - \cos^3 x} = \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)} = \sqrt{\cos x \cdot \sin^2 x} = \sqrt{\cos x}\,|\sin x|$，
所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}(\cos x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}(\cos x)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \left(\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

例 4 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{5-4x} = t$，即 $x = \frac{5-t^2}{4}$，$\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}t\mathrm{d}t$.
当 $x=-1$ 时，$t=3$；当 $x=1$ 时，$t=1$. 从而

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x = \int_3^1 \frac{5-t^2}{4} \cdot \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}t\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_3^1 \frac{1}{8}(t^2-5)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 5t\right)\right]\Bigg|_3^1$$
$$= \frac{1}{6}.$$

例 5 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{e^x-1} = t$，则 $x = \ln(t^2+1)$.
当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\ln 2$ 时，$t=1$. 从而

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = (2t - 2\arctan t)\Big|_0^1$$
$$= 2 - \frac{\pi}{2}.$$

例 6　求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　令 $x=\sin t$，则 $t=\arcsin x$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin t)=\cos t\mathrm{d}t$.

当 $x=\frac{1}{2}$时，$t=\frac{\pi}{6}$；当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$t=\frac{\pi}{4}$. 从而

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 t\mathrm{d}t = (-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}-1.$$

例 7　设$f(x)$在$[-a, a]$上连续，

(1) 若$f(x)$在区间$[-a, a]$($a>0$)上连续且为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0;$$

(2) 若$f(x)$在区间$[-a, a]$($a>0$)上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 若$f(x)=f(x+T)$($f(x)$是以 T 为周期的周期函数)，则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x;$$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$;

(6) $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

证明　我们仅证(1)和(4)，其余的留作习题.

(1) 已知$f(x)=-f(-x)$，$x\in[-a, a]$，则令 $x=-t$，得

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}(-t) = -\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

因此
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(4) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\mathrm{d}t$，$x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$；$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}(-t) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

例 8　计算 $\int_{-1}^{1} (|x|+\sin x)x^2\mathrm{d}x$.

解　因为积分区间关于原点对称，且$|x|x^2$ 为偶函数，$\sin x \cdot x^2$ 为奇函数，所以

$$\int_{-1}^{1} (|x|+\sin x)x^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x|x^2\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^3\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

例 9　计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

解　原式 $=\underset{(\text{偶函数})}{\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx}+\underset{(\text{奇函数})}{\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx}$

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-4\underset{(\text{单位圆的面积})}{\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx}=4-\pi.$$

例 10　计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx$.

解　$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2x}d(\cos x)$

$$=-\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

二、定积分的分部法

设函数 $u(x)$、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x)$、$v'(x)$，由于 $(uv)'=u'v+uv'$，即 $uv'=(uv)'-u'v$，因此

$$\int_a^b uv'dx=\int_a^b(uv)'dx-\int_a^b u'vdx,$$

即

$$\int_a^b uv'dx=uv\Big|_a^b-\int_a^b u'vdx$$

或

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

称上式为定积分的分部积分公式.

例 11　求 $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$.

解　$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)=\frac{1}{4}.$$

例 12　计算 $\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\arctan x$，$v=x$，则 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}x &=x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}\\&=1\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

例 13　求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x &=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_1^e\ln x\mathrm{d}x\\&=-(x\ln x-x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_1^e\\&=1-\frac{2}{e}+1=2\left(1-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

例 14　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\mathrm{d}x$.

解　由分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}(-\cos x)=x^2(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x^2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x;$$

再用一次分部积分公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\sin x=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1;$$

从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=\pi-2.$$

例 15　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}e^x=e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\mathrm{d}\sin x\\&=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\mathrm{d}x=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}e^x\\&=e^{\frac{\pi}{2}}-e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\mathrm{d}\cos x\end{aligned}$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x,$$

故

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x=e^{\frac{\pi}{2}}+1,$$

从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1).$$

例 16　计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{2x-1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. 当 $x=\frac{1}{2}$时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$.

于是有 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t$.

再使用分部积分法，令 $u=t$，$\mathrm{d}v=e^{-t}\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}t$，$v=-e^{-t}$.

从而 $\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t=-te^{-t}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{e}-(e^{-t})\Big|_0^1=1-\frac{2}{e}$.

***例 17**　导出 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$($n$ 为非负整数)的递推公式，并计算 $\int_0^{\pi}\sin^5\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解　易见 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1$. 当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}\cos x\\&=(-\sin^{n-1}x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,\end{aligned}$$

从而得到递推公式 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

反复用此公式，直到下标为 0 或 1，得

$$I_n=\begin{cases}\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2m,\\ \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n=2m+1,\end{cases}$$

其中 m 为自然数.

令 $\frac{x}{2}=t$，则 $dx=2dt$，于是，

$$\int_0^{\pi}\sin^5\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t dt=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}.$$

习题 3-6

1. 用定积分的换元法计算下列积分：

(1) $\int_0^1 (2x^2-\sqrt[3]{x}+1)dx$；　　(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi$；　　(4) $\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi_0\right)dt$；

(5) $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2+4x+5}dx$；　　(6) $\int_0^1\frac{1}{9x^2+6x+1}dx$；

(7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos\theta}d\theta$；　　(8) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin^2 x dx$；　　(10) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$；

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$；　　(12) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t dt$；

(13) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta$；　　(14) $\int_0^2 (1+xe^{\frac{x^2}{4}})dx$；

(15) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$；　　(16) $\int_{-1}^0\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$；

(17) $\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$；　　(18) $\int_1^{-1}\frac{e^x}{e^x+1}dx$；

(19) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$；　　(20) $\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx$.

2. 用定积分的换元法计算下列积分：

(1) $\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$；　　(2) $\int_0^4\frac{du}{1+\sqrt{u}}$；

(3) $\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$；　　(4) $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}dx$；

(5) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$；　　(6) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$；

(7) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；　　(8) $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$；

(9) $\int_0^1 (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$；　　(10) $\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}\mathrm{d}x$(提示：令 $t=\ln x$).

3. 用定积分的分部积分法求下列积分：

(1) $\int_0^{\mathrm{e}-1}\ln(x+1)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arccos x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan 2x\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$；

(9) $\int_0^4 \cos(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x$；　　(10) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}x\sin x\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$；

(11) $\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x$；　　(12) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$；

*(13) $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m x\mathrm{d}x\,(m\in\mathbf{Z}^+)$.

4. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^1\left(\frac{x\sin^4 x}{1+x^8}+3x^2|x|\right)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-2}^2 \max\{1, x^2\}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^4 |t^2-3t+2|\mathrm{d}t$；　　(4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\ln^2(1-x)}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

5. 设 $f''(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$.

6. 已知 $\int_x^{2\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\frac{\pi}{6}$，求 x.

7. 已知 $f(x)$ 满足方程

$$f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x,$$

求 $f(x)$.

8. 求函数 $I(x)=\int_1^x t(1+2\ln t)\mathrm{d}t$ 在 $[1, \mathrm{e}]$ 上的最大值与最小值.

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2}, & x\geqslant 0, \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

10. 计算 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

11. 设$f(x)$在$[-a, a]$上连续，证明以下结论成立.

（1）若$f(x)$在区间$[-a, a]$$(a>0)$上连续且为偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$；

（2）若$f(x)=f(x+T)$（$f(x)$是以T为周期的周期函数），则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x;$$

（3）$\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

（4）$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

第七节　定积分的几何应用与物理应用

[课前导读]

定积分是求某种总量的数学模型，它在几何学、物理学、经济学、社会学等方面都有着广泛的应用，显示了巨大的魅力. 也正是这些广泛的应用，推动着积分学的不断发展和完善. 因此，在学习的过程中，我们不仅要掌握计算某些实际问题的公式，更重要的还在于深刻领会用定积分解决实际问题的基本思想和方法——微元法，不断积累和提高数学的应用能力.

求曲边梯形面积经历了分割、近似、求和、取极限四步，导出了定积分的定义，即$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. 若将积分元素$f(\xi_i)\Delta x_i$对应于被积表达式$f(x)\mathrm{d}x$，积分和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限对应于$f(x)\mathrm{d}x$从$a$到$b$的定积分，则定积分的定义可简化为以下两步.

第一步　写出$f(x)\mathrm{d}x$（相当于写出$f(\xi_i)\Delta x_i$）；

第二步　求定积分$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$（相当于求$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限）.

从而可以利用定积分的有关运算解决一些几何和物理的问题.

一、平面图形的面积

1. 直角坐标系下的方程

根据定积分的几何意义，可以求出下面几种类型的平面图形的面积.

（1）由曲线$y=f(x)$，直线$x=a$、$x=b$及x轴所围成的平面图形的面积.

① 若$f(x)\geqslant 0$，则其面积为$S=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$（见图 3-19）；

② 若$f(x)\leqslant 0$，则其面积为$S=-\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$（见图 3-20）；

③ 若$f(x)$在积分区间$[a, b]$上既有取正值的部分，也有

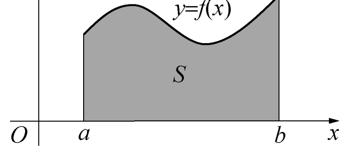


图 3-19

取负值的部分(见图 3-21)，则其面积为 $S=\int_a^{c_1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{c_1}^{c_2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$

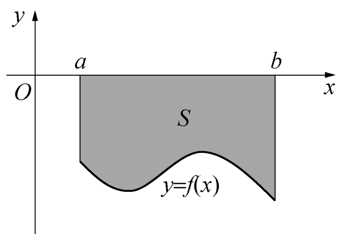


图 3-20

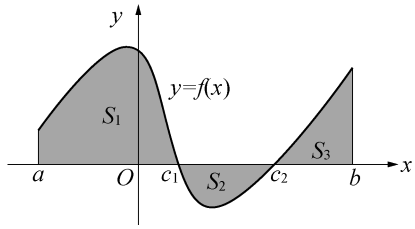


图 3-21

综上所述，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

我们利用定积分求面积的公式来验证一个已知的结果.

例 1　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

解　由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

其中，若 y 取正号，即表示上半椭圆的方程，若 y 取负号，即表示下半椭圆的方程(见图 3-22).

又设椭圆的面积为 S，它在第一象限的面积为 S_1. 由于椭圆关于两坐标轴对称，因而其面积为

$$S=4S_1=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

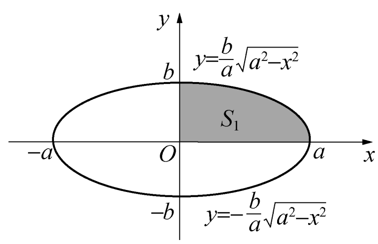


图 3-22

已知 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}a^2$，从而有 $S=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi}{4}a^2=\pi ab.$

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 也可表示成参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

因此也可以有

$$S=4S_1=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\cdot a(-\sin t)\,\mathrm{d}t$$
$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

特别地，若 $a=b=R$，则得到圆的面积 $S=\pi R^2$.

(2) 由曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 及直线 $x=a$、$x=b$ 所围成的平面图形的面积.

设曲线 $y=f(x)$ 位于曲线 $y=g(x)$ 的上方(见图 3-23)，则其面积为

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

(3) 由曲线 $x=\varphi(y)$、$x=\psi(y)$ 及直线 $y=a$、$y=b$ 所围成的平面图形的面积

设曲线 $x=\varphi(y)$ 位于曲线 $x=\psi(y)$ 的左侧(见图 3-24)，则其面积为

$$S=\int_a^b[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y.$$

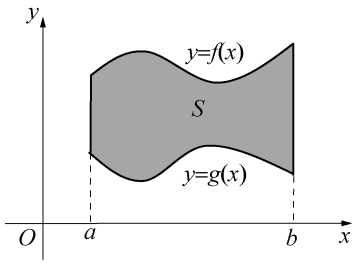


图 3-23

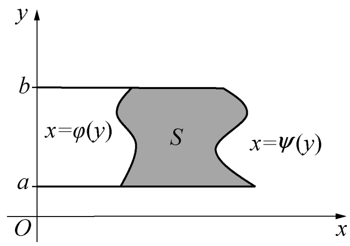


图 3-24

例 2　求由两条曲线 $y^2=ax$ 和 $ay=x^2(a>0)$ 围成的平面图形的面积.

解　(1) 求两曲线的交点：解方程组

$$\begin{cases}y^2=ax,\\ ay=x^2,\end{cases}\text{交点为}(0,0),(a,a).$$

(2) 画出两条曲线的图形(见图 3-25)，它们均为抛物线，并将它们的方程变形为

$$y=\sqrt{ax}\text{和}y=\frac{x^2}{a}.$$

(3) 求面积：利用平面图形求面积公式，有

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x=\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{a}\int_0^a x^2\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{a}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^a=\frac{1}{3}a^2.$$

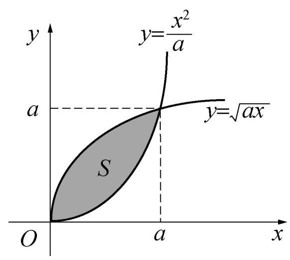


图 3-25

例 3　求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的平面图形的面积.

解　求曲线与直线的交点，即解方程组

$$\begin{cases}y^2=2x,\\ y=x-4,\end{cases}\text{得}\begin{cases}x=8,\\ y=4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=2,\\ y=-2,\end{cases}\text{故交点为}A(8,4)\text{和}B(2,-2).$$

若选择 x 为积分变量，则该平面图形可视为由两部分 S_1 和 S_2 组成(见图 3-26)，并将抛物线方程变形为 $y=\pm\sqrt{2x}$，则由求平面图形面积的公式，有

$$S=S_1+S_2=\int_0^2\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})\mathrm{d}x+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2+\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^8-\frac{1}{2}(x-4)^2\Big|_2^8$$

$$=\frac{16}{3}+\frac{64}{3}-\frac{8}{3}-6=18.$$

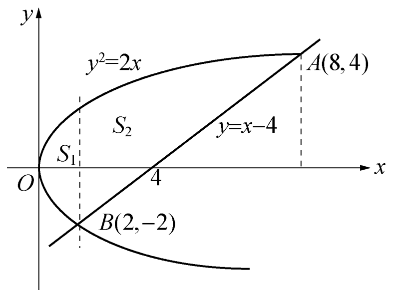


图 3-26

X 型区域分割

若选择 y 作为积分变量，则将曲线方程变为 $x=\dfrac{y^2}{2}$，直线方程变为 $x=y+4$(见图 3-27)，则由求平面图形面积的公式，有

$$S=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_{-2}^{4}=18.$$

上述两种解法中，显然第二种解法较为简便. 在求平面图形的面积时，应注意对公式的适当选择.

2. 微元法

如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件：

(1) U 是与某一个变量(比如 x)的变化范围(比如 $[a, b]$)有关的量；

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，即若将 $[a, b]$ 分成若干部分区间，则 U 相应地分成若干个部分量 ΔU，而 U 等于所有部分量 ΔU 之和：$U=\sum\Delta U$；

(3) 部分量 ΔU 的近似值可表示为 $f(x)\Delta x$，即 $\Delta U\approx f(x)\Delta x$.

那么就可考虑用定积分来表示这个量 U. 通常写出这个量 U 的积分表达式的步骤为：

(1) 根据问题的具体情况，选取一个变量(比如 x)作为积分变量，并确定它的变化区间(比如 $[a, b]$).

(2) 设想将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记作 $[x, x+\mathrm{d}x]$，求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为区间 $[a, b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 $\mathrm{d}x$ 的乘积，就将 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为量 U 的元素，记作 $\mathrm{d}U$，即 $\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 以所求量 U 的元素 $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在区间 $[a, b]$ 上积分，得 $U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 我们称上述步骤为定积分的**微元分析**.

我们可以利用微元法来求解例 3(见图 3-27).

(1) 选择 y 为积分变量，$y\in[-2, 4]$；

(2) 任选区间微元 $[y, y+\mathrm{d}y]$，面积微元 $\mathrm{d}S=\left(y+4-\dfrac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$；

(3) 面积的值即为在积分区间 $[-2, 4]$ 上，以面积微元 $\mathrm{d}S$ 为被积函数的定积分：

$$S=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=18.$$

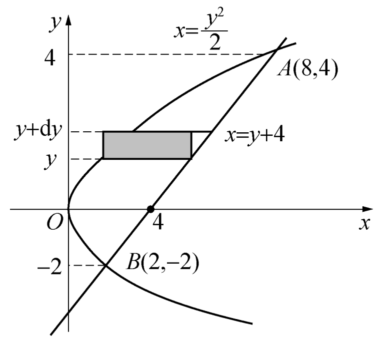


图 3-27

3. 极坐标系下平面图形的面积

某些平面图形，用极坐标计算它的面积比较方便.

在平面内取一个定点 O，叫作**极点**，引一条射线 Ox，叫作**极轴**，再选一个长度单位和角度的正方向（通常取逆时针方向）. 对于平面内的任意一点 M，用 r 表示线段 OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的角，r 叫作点 M 的**极径**，θ 叫作点 M 的**极角**，有序数对(r, θ)就叫作点 M 的**极坐标**. 这样建立的坐标系叫作**极坐标系**（见图 3-28）.

极坐标

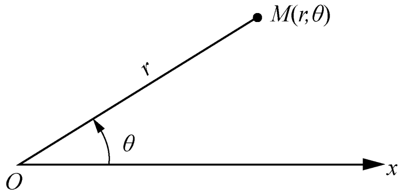


图 3-28

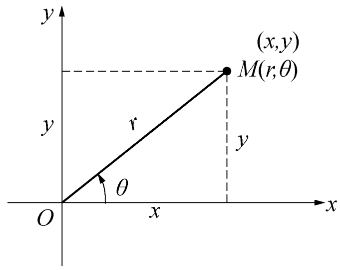


图 3-29

如果让直角坐标系的原点和极坐标的极点重合，极轴和直角坐标系的 x 轴正半轴重合，设 M 在直角坐标系下的坐标为(x, y)，对应的极坐标系下的坐标为(r, θ)（见图 3-29），则可以得到两个坐标系的坐标之间的变量互化关系式：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ \dfrac{y}{x} = \tan\theta. \end{cases}$$

设由曲线 $r = r(\theta)$ 及 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ 围成一图形（简称曲边扇形），这里 $r(\theta)$ 在$[\alpha, \beta]$上连续，且 $r(\theta) \geqslant 0$. 由于当 θ 在$[\alpha, \beta]$上变化时，$r = r(\theta)$ 也在变动（见图 3-30），现用微元法求曲边扇形的面积.

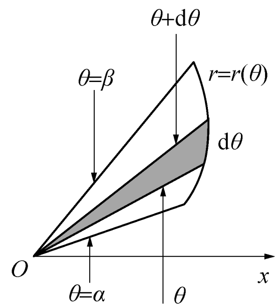


图 3-30

取 θ 为积分变量，它的变化区间为$[\alpha, \beta]$，相应于$[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$的窄曲边扇形面积可用以 $r(\theta)$ 为半径、$\mathrm{d}\theta$ 为圆心角的扇形面积近似代替，即面积微元为 $\mathrm{d}S = \dfrac{1}{2}[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$，因此曲边扇形的面积为以面积微元作为被积表达式，在区间$[\alpha, \beta]$上的定积分：

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta.$$

注　(1) 如果图形由内含极点的封闭曲线 $r = r(\theta)$ 所围成（见图 3-31），则

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} [r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta;$$

(2) 如果图形由曲线 $r = r_1(\theta)$，$r = r_2(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta(\alpha < \beta)$ 所围成（见图 3-32），则

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

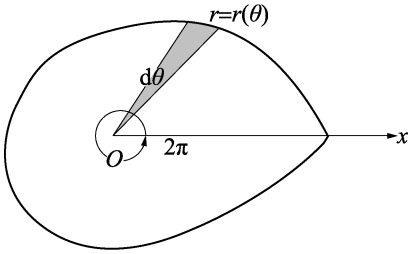


图 3-31

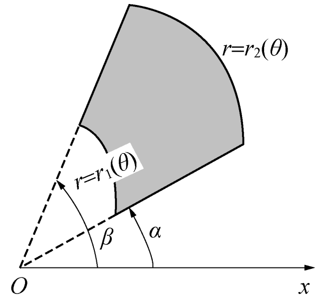


图 3-32

例 4　计算阿基米德螺线 $r=a\theta(a>0)$ 上相应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积(见图 3-33).

解　$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\theta^2\mathrm{d}\theta=\dfrac{a^2}{2}\left[\dfrac{\theta^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\dfrac{4a^2\pi^3}{3}.$

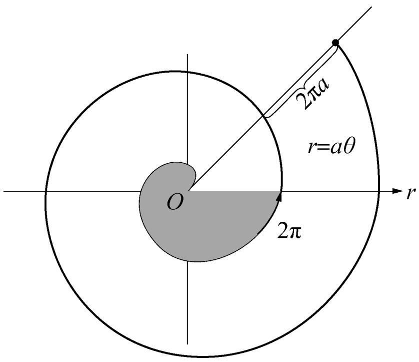


图 3-33

阿基米德螺线

例 5　计算心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围成的图形的面积(见图 3-34).

解　图形关于极轴对称. 对于极轴以上部分图形，θ 的变化区间为 $[0,\pi]$，

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(3+4\cos\theta+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\left(3\theta+4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{3\pi a^2}{2}.$$

心形线

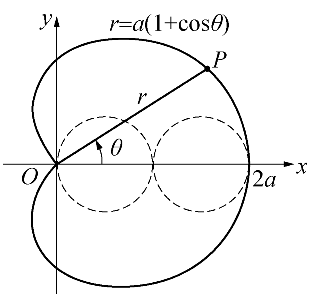


图 3-34

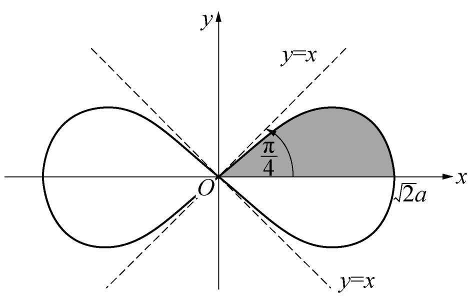


图 3-35

例 6　计算由双纽线 $r^2=2a^2\cos2\theta$ 所围成的区域的面积(见图 3-35).

解　由 $r^2=2a^2\cos2\theta=0$ 知 $\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}$. 由图形的对称性得

$$S=4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos2\theta\mathrm{d}\theta\right)=2a^2.$$

双纽线

二、空间立体的体积

1. 旋转体

由一个平面图形绕该平面内一条直线旋转一周而成的立体，称为**旋转体**. 其中该条直线就称为**旋转轴**. 圆柱、圆锥、圆台均可当作旋转体(见图 3-36).

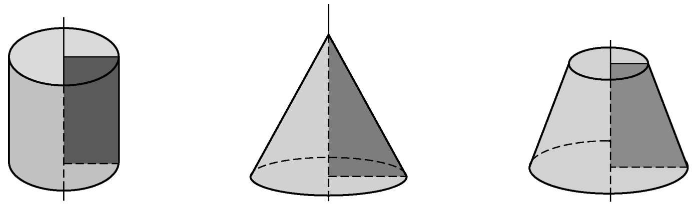


图 3-36

建立直角坐标系(见图 3-37)，平面图形 A 由曲线 $y=f(x)$ $(f(x)>0)$、直线 $x=a$、$x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成，Ω 为 A 绕 x 轴旋转一周而成的立体，选 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，任取$[x,x+\mathrm{d}x]$，则在$[x,x+\mathrm{d}x]$上的小旋转体体积可以近似等于底面积为 $\pi f^2(x)$、以 $\mathrm{d}x$ 为高的薄柱体体积，即体积元素为

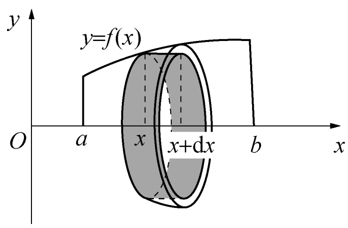


图 3-37

$$\mathrm{d}V_x=\pi f^2(x)\mathrm{d}x,$$

故$[a,b]$上的旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

若 Ω'为 A 绕 y 轴旋转一周而成的立体，则选 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，任取$[x,x+\mathrm{d}x]$(见图 3-38)，则在$[x,x+\mathrm{d}x]$上的小旋转体体积可以近似等于内表面积为$2\pi f(x)$、厚为 $\mathrm{d}x$ 的薄柱壳体积(见图 3-39)，即体积元素为

旋转体

$$\mathrm{d}V_y=2\pi xf(x)\mathrm{d}x,$$

故$[a,b]$上的旋转体体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

类似地，若平面图形 A 由曲线 $x=g(y)$ $(g(y)>0)$，直线$y=c$、$y=d(c<d)$及 y 轴所围成，Ω 为 A 绕 y 轴旋转一周而成的立体，其体积为 $V_y=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y$(见图 3-40)；绕 x 轴旋转

一周而成的立体体积为 $V_x=2\pi\int_c^d yg(y)\,\mathrm{d}y$.

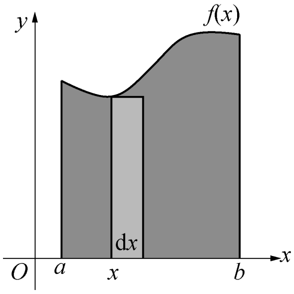


图 3-38

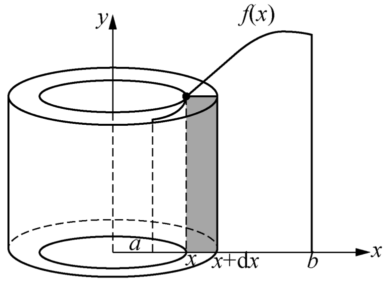


图 3-39

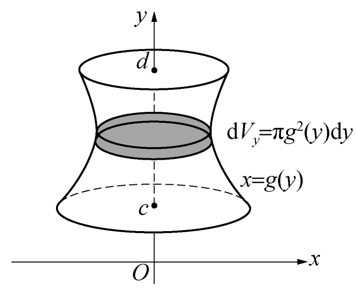


图 3-40

例 7　求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$分别绕 x 轴与 y 轴旋转而得的旋转体的体积.

解　先求椭圆绕 x 轴旋转而得的旋转体的体积 V_x. 由椭圆的方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 得 $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，如图 3-41 所示.

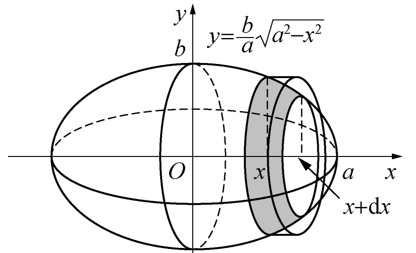


图 3-41

上半椭圆绕 x 轴旋转与下半椭圆绕 x 轴旋转而得的结果相同，故绕 x 轴旋转而得的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V_x&=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.\end{aligned}$$

同理得椭圆绕 y 轴旋转而得的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V_y&=\int_{-b}^{b}\pi x^2\mathrm{d}y=2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)\,\mathrm{d}y\\&=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2b.\end{aligned}$$

特别地，令 $a=b=R$，即得球体的体积公式为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

例 8　求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$（见图 3-42）绕 x 轴旋转构成的旋转体的体积.

解　体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3\mathrm{d}x,$$

所求体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\mathrm{d}x=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

星形线

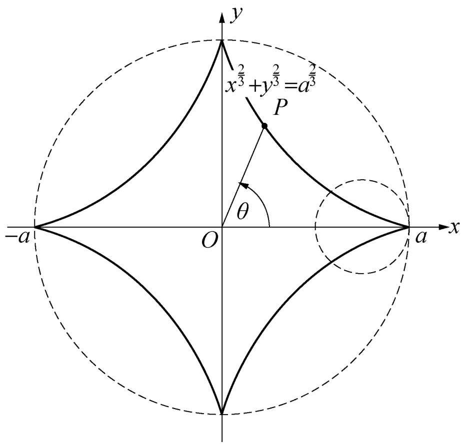


图 3-42

例 9　求曲线 $xy=4$，直线 $y=1$、$y=2$ 所围成的图形（见图 3-43）绕 y 轴旋转构成的旋转体的体积.

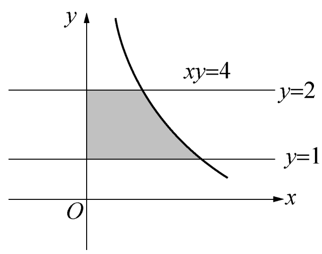


图 3-43

解　体积微元为

$$\mathrm{d}V=\pi x^2\mathrm{d}y=\pi\frac{16}{y^2}\mathrm{d}y,$$

所求体积为

$$V=\pi\int_1^2\frac{16}{y^2}\mathrm{d}y=\pi\left(-\frac{16}{y}\right)\Bigg|_1^2=8\pi.$$

例 10　求由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱，$x$ 轴所围成的图形（见图 3-44）分别绕 x 轴、y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解　$V_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}a^2\ (1-\cos t)^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t)\mathrm{d}t=5\pi^2a^3$,

$$V_y=2\pi\int_0^{2\pi a}xy\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)a(1-\cos t)a(1-\cos t)\mathrm{d}t=6\pi^3a^3.$$

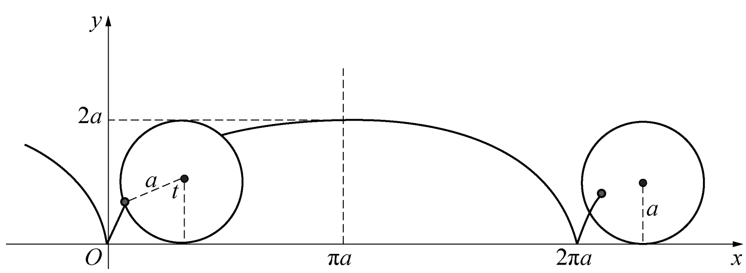


图 3-44

2. 平行截面面积已知的立体的体积

由曲线 $y=f(x)\,(f(x)>0)$，直线 $x=a$、$x=b\,(a<b)$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体体积为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，其中被积函数 $\pi f^2(x)$ 即为立体过点 x 且垂直于 x 轴

的截面面积，记为 $S(x)$（见图 3-45）. 故旋转体的体积公式可写为 $V_x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. 现将此结果推广到一般的已知截面面积的立体体积.

设有一个立体，它被垂直于某条直线（如 x 轴）的平面所截的截面面积 $S(x)$ 为 x 的连续函数，且此物体的位置在平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间（见图 3-46），求其体积 V.

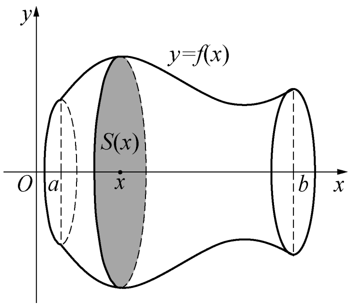


图 3-45

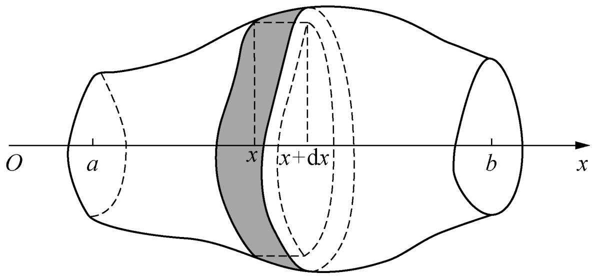


图 3-46

若取定轴为 x 轴，设 $S(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，取 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a,b]$；立体中相应于 $[a,b]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的薄片体积，近似等于底面积为 $S(x)$、高为 $\mathrm{d}x$ 的柱体体积，即体积元素为

$$\mathrm{d}V=S(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

例 11　一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心并与底面交成角 α（见图 3-47），计算该平面截圆柱体所得的立体的体积.

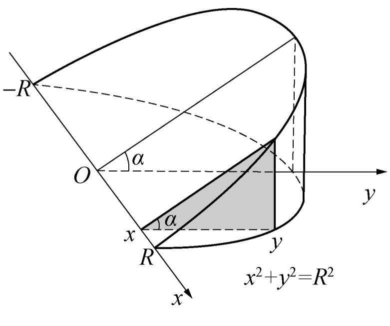


图 3-47

平面截圆柱体的体积

解　若设底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$，则立体中过点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形，其两条直角边长分别为 y、$y\tan\alpha$，即 $\sqrt{R^2-x^2}$、$\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$，故

$$S(x)=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha,$$

因此

$$V=\int_{-R}^{R}S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\alpha\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\tan\alpha\cdot\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^R=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

例 12　求 $x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$ 两柱面所围立体的体积(见图 3-48).

解　由对称性，知 $V=8V_1$(其中 V_1 为在第一象限内部分的体积)，

$$S(x)=\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=(a^2-x^2),\ x\in[0,\ a],$$

$$V=8V_1=8\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=8\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^a=\frac{16}{3}a^3.$$

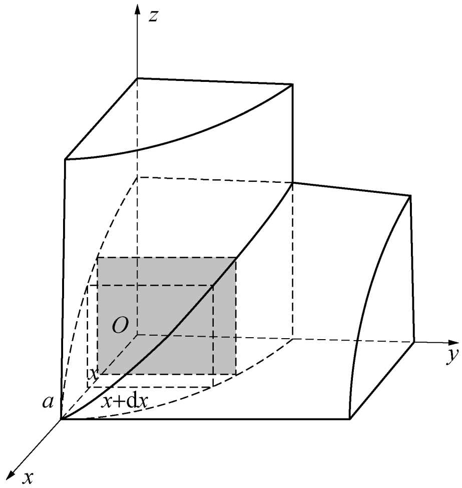


图 3-48

三、曲线的弧长

在平面几何中，直线的长度容易计算，而除了圆弧以外的曲线长度的计算就比较困难，现在将讨论这一问题.

圆周长是用圆内接多边形的周长，当边数无限增加时的极限来确定的. 一般平面曲线弧长的计算也可运用这一思想.

1. 平面曲线的弧长的概念

设 AB 为曲线弧$\widehat{AB}$上的两个端点，任取分点 $A=M_0$，M_1，…，$M_n=B\in\widehat{AB}$，并依次连接相邻分点得内接折线(见图 3-49)，其长度为 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\overline{M_{i-1}M_i}|$.

当分点无限增多时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\overline{M_{i-1}M_i}|$的极限存在，则称此极限为曲线弧$\widehat{AB}$的弧长. 此时称$\widehat{AB}$是可求长的. 对此，我们有如下结论.

定理　光滑曲线弧是可求长的.

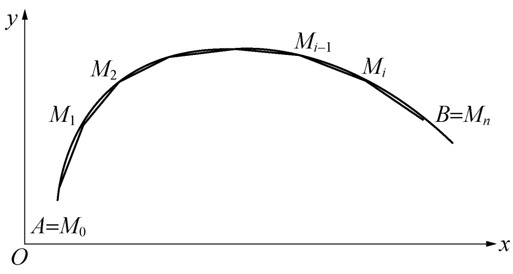


图 3-49

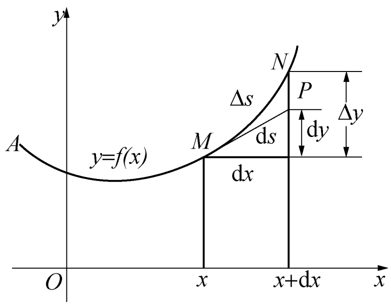


图 3-50

下面就来探讨光滑曲线弧长的计算公式.

2. 直角坐标系中的弧长公式

设函数 $f(x)$具有一阶连续导数，曲线弧由 $y=f(x)$($a\leqslant x\leqslant b$)给出，任取 $x\in[a,\ b]$，过 x 作曲线的切线，设 x 对应曲线上的点 $M(x,\ y)$，$x+\Delta x$($x+\mathrm{d}x$)对应曲线上的点 $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$，对应切线上的点 $P(x+\mathrm{d}x,\ y+\mathrm{d}y)$，区间$[x,\ x+\Delta x]$对应小弧段$\widehat{MN}$，记小弧段$\widehat{MN}$长度为 Δs，记切线$\overline{MP}$的长度为 $\mathrm{d}s$(见图3-50). 由微分的几何意义可知，当 Δx 足够小时，可以

用切线段$\overline{MP}$近似替代弧段$\widehat{MN}$，所以 Δs 的近似值即为弧长微元

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

因此所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

由于 $s\geqslant0$，故要求 $a<b$.

例 13　求曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于 x 从 1 到 2 的一段弧的长度.

解　曲线由直角坐标方程给出，取 x 为积分变量，$y'=x^{\frac{1}{2}}$，弧长微元为

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+x}\,dx,$$

所求弧长为

$$s=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1).$$

3. 由参数方程表示的弧长公式

设曲线弧由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$给出，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数. 由弧微分可知 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$，因此 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$.

注　由于 $s\geqslant0$，故要求 $\alpha<\beta$.

例 14　求圆 $x^2+y^2=R^2$ 的周长.

解　将圆的方程化为参数方程：

$$\begin{cases}x=R\cos\theta,\\ y=R\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant2\pi),$$

则所求圆周长

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'_\theta)^2+(y'_\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,d\theta=R\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi R.$$

例 15　求星形线$\begin{cases}x=a\cos^3t,\\ y=a\sin^3t\end{cases}$的全长.

解　由对称性可知，星形线的全长为其在第一象限部分的 4 倍，则由弧长公式得

$$\begin{aligned}s&=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4t\sin^2t+9a^2\sin^4t\cos^2t}\,dt\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a|\sin t\cos t|\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\,d(\sin t)=6a(\sin^2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=6a.\end{aligned}$$

例 16　求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant2\pi)$一拱的弧长.

解　$x'(t)=a(1-\cos t)$，$y'(t)=a\sin t$.

由弧长计算公式，得

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$$
$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t=2a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t-2a\int_{\pi}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=8a.$$

4. 极坐标系下的弧长公式

设曲线弧由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数. 由弧微分可知 $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$，因此 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(t)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

注　由于 $s\geqslant0$，故要求 $\alpha<\beta$.

例 17　计算阿基米德螺线 $r=a\theta(a>0)$ 上相应于 θ 从 0 到 2π 一段的弧长.

解　$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a\theta)^2+a^2}\,\mathrm{d}\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta$
$$=\frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\ln(\theta+\sqrt{\theta^2+1})\right]\Big|_0^{2\pi}$$
$$=\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})\right].$$

例 18　求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

解　由对称性，知 $s=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta$
$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

* 四、定积分在物理上的应用举例

本小节内容供对物理知识要求较高的专业选学.

定积分在物理上的应用相当广泛，如求具有均匀质量分布的平面曲线和平面图形的重心，变速直线运动物体在某时间区间内经过的距离，物体的转动惯量和变力做功等. 下面通过实例加以说明.

本节仅介绍应用定积分来计算变力做功和水压力.

1. 变力沿直线所做的功

例 19　设 40 N 的力使弹簧从自然长度 10 cm 拉长成 15 cm，问：需要做多大的功才能克服弹性恢复力，将伸长的弹簧从 15 cm 处再拉长 3 cm？

解 取弹簧的平衡点作为原点建立坐标系，如图 3-51 所示.

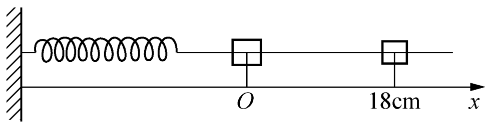


图 3-51

由物理学知道，弹簧在拉伸过程中需要的力 $F(x)$ 与伸长量 x 成正比，即 $F(x)=kx$，其中 k 为比例系数. 当弹簧从 10 cm 拉长到 15 cm 时，它的伸长量为 5 cm=0.05 m.

因有 $F(0.05)=40$，即 $0.05k=40$，故得 $k=800$ N/m. 于是 $F(x)=800x$.

弹簧从 15 cm 拉长到 18 cm，即变化区间为[0.05，0.08].

由于拉力随着伸长量的变化而不断变化，所以拉力所做的功不能直接用“力×位移”来计算. 也就是说，压力在区间上分布是不均匀的. 把伸缩区间进行分割，分割成许多小区间. 由于小区间上点的距离非常近，我们认为在每个小区间上的弹簧拉力近似相等，就可以用恒力做功的计算公式算出拉力对在每个小区上所做功的近似值. 并且拉力所做功关于区间具有可加性，因此拉力所做的功可以用定积分来计算，就得到整个区间上拉力所做的功.

在积分区间[0.05，0.08]中任取 x，作微元区间[x，$x+\Delta x$]，在微元区间上拉力所做的功即为功的微元

$$dW=F(x)dx=800xdx,$$

于是拉力使弹簧拉长 3 cm = 0.03 m 所做的功为

$$W=\int_{0.05}^{0.08}800x\,dx=400x^2\Big|_{0.05}^{0.08}=400(0.0064-0.0025)=1.56\text{J}.$$

例 20　设有一直径为 20 m 的半球形水池，池内贮满水. 若要把水抽尽，至少做多少功?

解　如图 3-52 所示，建立直角坐标系，池壁与面的交线为半圆周 $x^2+y^2=100(x\geqslant 0)$. 选取 x 为积分变量，$x\in[0,10]$，与微元区间[x，$x+dx$]对应的是厚度为 dx 的一层水，微元上的这层水的体积

$$\Delta V\approx \pi y^2\Delta x=\pi(100-x^2)\Delta x\ \text{m}^3,$$

其所受的重力为 $dF\approx \rho g dV=g\pi\rho(100-x^2)dx$kN.

把这层水抽出，至少需要提升 x(m)距离.

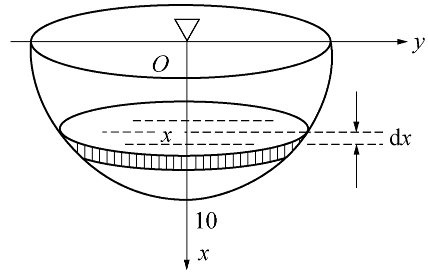


图 3-52

故需做的功为

$$\Delta W\approx g\rho\pi(100-x^2)\Delta x\cdot x=g\pi\rho x(100-x^2)\Delta x\ \text{J},$$

其中 $\rho=1\,000$ kg/m^3 是水的密度，$g=9.8$m/s^2 是重力加速度. 故做功微元

$$dW=g\pi\rho x(100-x^2)dx.$$

所求功为

$$W=\int_0^{10}g\pi\rho x(100-x^2)dx=g\pi\rho\int_0^{10}x(100-x^2)dx$$

$$=g\frac{\pi\rho}{4}\times 10^4=2\,500\pi\rho g\approx 7.693\times 10^7\ \text{J}.$$

2. 水压力

从物理学知识可以知道，在水深为 h 处的压强为 $p=\nu h$(ν 是水的比重). 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处，则平板一侧所受的水压力为 $F=pA$. 如果平板垂直地放置在水中，则由于水深不同的点的压强不同，则计算平板的水压力需要使用定积分.

例 21　一个三角形薄板铅直地沉浸在水中，底在上且与水面相接，底边长为 a，高为 h，求薄板每侧所受的压力(设水的比重为 ν).

解　建立直角坐标系，如图 3-53 所示，则三角形的一条腰边的方程为 $\frac{2y}{a}=\frac{h-x}{h}$，即 $y=$

$\frac{a}{2h}(h-x)$.

因为压强与水深成正比，同一深度的压强是相同的，于是将闸门水平分割成小横条，取积分变量为 x，$x\in[0,h]$，任取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,h]$，闸门上有高为 $\mathrm{d}x$ 的小条，其面积为

$$2y\mathrm{d}x=a\left(1-\frac{x}{h}\right)\mathrm{d}x,$$

其上的压强近似等于 νx.

故其上所受的水压力

$$\mathrm{d}F=2\nu xy\mathrm{d}x=\frac{\nu a}{h}x(h-x)\mathrm{d}x,$$

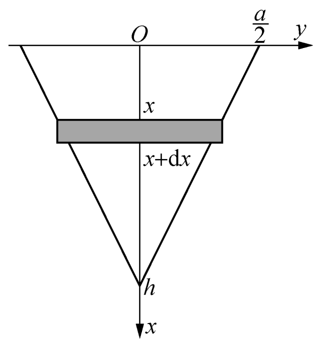


图 3-53

因此

$$F=\frac{\nu a}{h}\int_0^h x(h-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\nu ah^2.$$

习题 3-7

1. 求下列平面图形的面积：

(1) 由 $y^2=x$ 和 $y=x^2$ 所围成的图形；

(2) 由抛物线 $y+1=x^2$ 与直线 $y=1+x$ 所围成的图形；

(3) 由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 所围成的图形；

(4) 由抛物线 $y=2x-x^2$ 与直线 $x+y=0$ 所围成的图形；

(5) 由 $y^2=2x$ 和 $y=x-4$ 所围成的图形；

(6) 由 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$ 和 $x=1$ 所围成的图形；

(7) 由曲线 $y=x^3-6x$ 和 $y=x^2$ 所围成的图形；

(8) 由三次抛物线 $y=x^3$ 与直线 $y=2x$ 所围成的平面图形；

(9) 由曲线 $xy=1$ 及直线 $y=x$ 和 $y=2$ 所围成的平面图形；

(10) 由曲线 $y=|\ln x|$ 与直线 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$x=\mathrm{e}$ 和 x 轴所围成的平面图形.

2. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围平面图形的面积.

3. 求下列平面图形的面积：

(1) 由摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与横轴所围成的图形；

(2) 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(a>0)$ 所围成的图形；

*(3) 由曲线 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$（圆周）和 $\rho^2=\cos 2\theta$（双纽线）所围成图形的公共部分；

*(4) 由 $\rho=1$ 和 $\rho^2=2\cos 2\theta$ 所围成图形的公共部分.

4. 求下列旋转体的体积：

（1）曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=1$，$x=4$ 和 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴和 y 轴旋转而得的旋转体；

（2）曲线 $y=e^{-x}$ 与直线 $y=0$，$x=1$ 所围成的位于第一象限内的平面图形绕 x 轴旋转而得的旋转体；

（3）曲线 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 与 x 轴在区间 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上所围成的平面图形绕 x 轴旋转而得的旋转体；

（4）曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转而得的旋转体；

（5）曲线 $y=x^2$ 和 $y=2-x^2$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而得的旋转体；

（6）已知抛物线 $y^2=8x$，求

① 抛物线在点 $(2,\ 4)$ 处的法线方程，

② 抛物线 $y\geqslant 0$ 的部分及其在 $(2,\ 4)$ 处的法线和 x 轴所围成图形绕 y 轴旋转而得的旋转体；

（7）试用两种方法计算由 $y=(x-1)(x-2)$ 和 $y=0$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转而得的旋转体.

5. 一物体，其底面是半径为 r 的圆，用垂直于底圆某一直径的平面截该物体，所得截面都是正方形，求该物体的体积.

6. 立体底面为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 围成的图形，而任一垂直于轴的截面分别为（1）正方形，（2）等边三角形，（3）半圆形，求对应情况下立体的体积.

7. 求下列曲线的弧长.

（1）曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

（2）抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到该曲线上的一点 $M(x,\ y)$ 的弧；

（3）曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 4$ 一段的弧；

（4）曲线 $y=\ln(\cos x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}$ 一段的弧；

（5）曲线 $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y$ 在 $1\leqslant y\leqslant e$ 一段的弧；

（6）曲线 $x=\arctan t$，$y=\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$ 自 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段弧；

（7）阿基米德螺线 $r=a\theta$ $(a>0)$ 上相应于 θ 从 0 到 2π 的弧；

（8）极坐标系下曲线 $r=a\left(\sin\dfrac{\theta}{3}\right)^3$ $(a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 3\pi)$.

8. 在摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1∶3 的点的坐标.

*9. 一圆锥形容器，上底半径为 1 m，高 3 m，锥中盛水深 2 m，如将水全部抽出，需做功多少？

*10. 一圆柱形的容器高为 5 m，底圆半径为 3 m，容器内盛满水，若将其中的水全部抽出，需做多少功？

*11. 弹性体所受压缩之力 F 与缩短距离 x 之间的关系按胡克定律 $F=kx$ 计算，现有一个弹簧，原长为 1 m，每压缩 1 cm，需力 5 N，若自 80 cm 压缩至 60 cm，则做了多少功？

*12. 一横截面为等腰梯形的贮水池，梯形上底长 6 m，下底长 4 m，深 2 m，长 8 m，要把满池水全部抽到距水池上方 20 m 的水塔中，需做功多少？

*13. 一块底为 4 m、高为 3 m 的等腰三角形平板铅直地置于水中，底边在上，平行于水面，位于水面下 1 m，求该平板的一侧受到的水压力.

*14. 某下水道的横截面是直径为 3 m 的圆，水平铺设，下水道内水深 1.5 m，求与下水道垂直的闸门所受的压力.

第八节　反常积分

[课前导读]

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 对被积函数和积分区间都有要求.

(1) 积分区间为 $[a, b]$，是有限区间；

(2) 被积函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界的，一般还要求是连续的.

然而，在实际问题中往往会遇到不满足上述条件的情形. 例如，将火箭发射到远离地球的太空中，要计算克服地心引力所做的功，就需要考虑积分区间为无限的积分. 因此有必要推广定积分的概念，即把积分区间扩展到无穷区间，比如 $(-\infty, b]$、$[a, +\infty)$ 或 $(-\infty, +\infty)$，或者被积函数 $f(x)$ 在积分区间内是无界时的情形，从而形成“反常积分”(广义积分)的概念，而原来的定积分可以称为常义积分.

一、无限区间上的反常积分

先看几个定积分：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x \Big|_0^b = \arctan b;$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2,$$

$$\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln b \Big|_1^2 = \ln b.$$

定积分的几何意义是在对应区间上曲边梯形面积的代数和. 现在让 $b\to+\infty$，取对应的定积分的极限，则有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\arctan x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\ln b \Big|_1^2 = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$$

这两个极限的几何意义也十分明显.

曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 与 y 轴、x 轴正半轴所“围”的图形可以向 x 轴正方向无限延伸(见图3-54)，且有“有限”面积 $\dfrac{\pi}{2}$，对应的积分极限存在；而曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $x=1$、x 轴正半轴所“围”的图形也可以向 x 轴正方向无限延伸(见图 3-55)，同时“面积”也无限增大，故对应的极限不存在. 这就是这一节要讨论的反常积分的“几何意义”. 下面给出反常积分的定义.

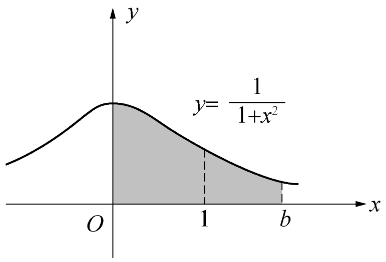


图 3-54

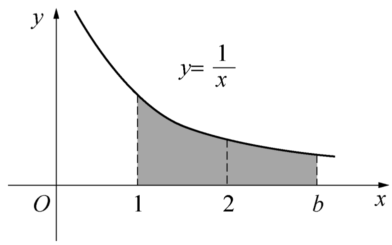


图 3-55

反常积分

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续，取 $a<b$，如果极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果这个极限不存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

从定义中看出一个反常积分化为计算定积分与取极限两部分，这都是我们熟悉的知识；同时 a 是任意取的，因此 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$ 必须对任意一种趋近方式都成立.

当反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一个数；而当反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 仅是一个符号.

同样可以定义区间 $[a, +\infty)$ 或 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，取 $b>a$，如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果这个极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，若 $\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x$，$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称上述两反常积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的反常积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$.

记 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$，$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，
则广义积分可表示为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(a)=[F(x)]\Big|_a^{+\infty},$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(-\infty)=[F(x)]\Big|_{-\infty}^{b}.$$

如果 $F(+\infty)$、$F(-\infty)$ 均存在，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(-\infty).$$

例 1　分别计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$；

$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{0}=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$；

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

例 2　讨论反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$的敛散性.

解　当 $p=1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$，故反常积分发散；

当 $p\neq1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \frac{1}{p-1}, & p>1.\end{cases}$

因此，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$当 $p\leqslant1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

这是一个非常重要的反常积分，应记住它的结果.

例 3　讨论反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\cos x\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$.

由于 $\int_{-\infty}^{0}\cos x\mathrm{d}x=[\sin x]\Big|_{-\infty}^{0}$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在，故反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\cos x\mathrm{d}x$ 发散，从而反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 也发散.

例 4　计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$.

解　用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx&=-\int_0^{+\infty}\ln(x+1)\,d\left(\frac{1}{x+1}\right)\\&=\left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]\Bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+1}dx\\&=\left[-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}-0\right]+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx\\&=0-\left(\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=-\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}-1\right)=1.\end{aligned}$$

二、无界函数的反常积分(瑕积分)

如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的任一邻域内都无界，则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界间断点). 无界函数的反常积分也称瑕积分.

定义 4　设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点，任取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分，仍记作 $\int_a^b f(x)\,dx$，即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx,$$

也称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛. 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx$ 不存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散.

定义 5　设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续，点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点，任取 $\varepsilon>0$，如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上的反常积分，仍记作 $\int_a^b f(x)\,dx$，即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx,$$

也称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛. 如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx$ 不存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散.

定义 6　设函数 $f(x)$ 在 $[a, c)$，$(c, b]$ 上连续，点 c 为函数 $f(x)$ 的瑕点，如果 $\int_a^c f(x)\,dx$ 及 $\int_c^b f(x)\,dx$ 均收敛，则定义

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

否则称 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散.

无界函数的反常积分在形式上与定积分没有区别，故需要注意对它的识别.

若 $F'(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. 其中

当 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点且 $F'(a)=f(a)$ 时，$F(a)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$；

当 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点且 $F'(b)=f(b)$ 时，$F(b)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$.

例 5　计算反常积分 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 \mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1$，

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

例 6　讨论反常积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　当 $q=1$ 时，$\int_0^1 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_0^1=\ln 1-\lim\limits_{x\to 0^+}\ln|x|$.

由于
$$\lim_{x\to 0^+}\ln|x|=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty,$$
极限不存在，故反常积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $q\neq 1$ 时，$\int_0^1 \dfrac{1}{x^q}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{1-q}}{1-q}\Big|_0^1=\begin{cases}+\infty, & q>1,\\ \dfrac{1}{1-q}, & q<1,\end{cases}$

因此，$\int_0^1 \dfrac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 当 $q\geqslant 1$ 时发散，当 $q<1$ 时收敛.

注　由例 6 可知，$\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 发散(对任何 q).

例 7　计算反常积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　这个反常积分既是无穷限的，又有瑕点，故需要分开讨论.
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\ &=-2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\Big|_0^1-2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty}=-2(0-1)=2.\end{aligned}$$

例 8　讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　由于 $\int_{-1}^0 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^0\left(\text{或}\int_0^1 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\Big|_0^1\right)$发散，故 $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

注　如果忽视瑕点 $x=0$，则会出现错误结果：
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1=-1-1=-2.$$

例 9　讨论反常积分 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$ 的敛散性.

解　由 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}=\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x-1)}$,

知 $x=1$ 为瑕点, 因此先考虑 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$. 由于

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|-\ln 3\right)$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|$ 不存在, 故 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$ 发散, 因此 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$ 发散.

习题 3-8

1. 讨论下列广义积分的敛散性, 若收敛, 求出其值:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x(x+5)}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

2. 讨论下列广义积分的敛散性, 若收敛, 求出其值:

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^1 \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

3. 设反常积分 $I=\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$, 问: k 为何值时, (1) I 发散, (2) I 收敛, (3) I 取得最小值?

本章小结

本章小结

不定积分	理解 原函数和不定积分的概念、性质，积分与微分的关系 会求 不定积分(基本公式、线性运算、凑微分法、换元技巧、分部积分)
定积分	理解 定积分的概念与性质 理解 变上限定积分是其上限的函数及其导数求法 会求 定积分、广义积分
定积分应用	会用 定积分求几何问题(面积、体积、弧长) 会用 定积分求物理问题(变力做功、侧压力)

章节测试三

一、填空选择题：

1. 若 $\int \mathrm{d}[f(x)] = \int \mathrm{d}[g(x)]$，则下列各式中不成立的是(　　)；

A. $f(x)=g(x)$　　B. $f'(x)=g'(x)$

C. $\mathrm{d}[f(x)]=\mathrm{d}[g(x)]$　　D. $\mathrm{d}\left[\int f'(x)\,\mathrm{d}x\right]=\mathrm{d}\left[\int g'(x)\,\mathrm{d}x\right]$

2. 下列各式中成立的是(　　)；

A. $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$（$n$ 为正整数）

C. $\int_0^{\pi} \sin 2x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$

3. 若反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 收敛，则(　　)；

A. $p>1$　　B. $p\geqslant 1$　　C. $0<p<1$　　D. $p>0$

4. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的偶函数，$F'(x)=f(x)$，则原函数 $F(x)$(　　)；

A. 均为奇函数　　B. 均为偶函数

C. 只有一个是奇函数　　D. 既非奇函数也非偶函数

5. 设在 $[a, b]$ 上 $f(x)>0$，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则(　　)；

A. $\frac{f(a)+f(b)}{2}<\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}<f(a)$　　B. $\frac{f(a)+f(b)}{2}<\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}<f(b)$

C. $f(a)<\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}<\frac{f(a)+f(b)}{2}$　　D. $f(b)<\frac{\int_a^b (x)\,\mathrm{d}x}{b-a}f<\frac{f(a)+f(b)}{2}$

6. 记 $I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$，$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$，$I_3=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x$，$I_4=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$，则这 4 项积分的大小关系为(　　)；

A. $I_2>I_1>I_3>I_4$　　B. $I_3>I_2>I_1>I_4$

C. $I_4>I_1>I_3>I_2$　　D. $I_1>I_2>I_4>I_3$

7. 将 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{\sqrt{x}}\tan t\,\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{x^2}(\mathrm{e}^t-1)\,\mathrm{d}t$ 按低阶到高阶的顺序排列为________；

8. 光滑曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 的弧长计算公式为 $s=$________.

二、计算下列积分：

1. $\int \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$；

2. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

3. $\int \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；

4. $\int_{-1}^{1}\left(x^2\mathrm{e}^{x^3}+\dfrac{x^3\sin^4 x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$；

5. $\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$；

6. $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x$.

三、计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-x}$.

四、若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & x>0,\end{cases}$求$\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

五、求由 x 轴、曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 过原点的切线所围成图形的面积，并求该图形分别绕 x 轴与 y 轴旋转所得旋转体的体积.

六、计算三叶玫瑰线 $\rho=a\sin 3\theta(a>0)$ 所围图形的面积(见图 3-56).

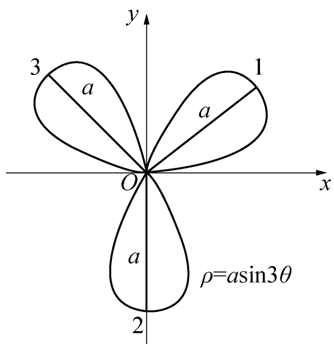


图 3-56

*七、一块等腰梯形的板，上底为 4 m，下底为 10 m，高 10 m，将它垂直放在水中，设下底沉浸于水面下 20 m 处，求水对该板的压力.

拓展阅读

一、微积分的由来

17 世纪下半叶,英国数学家、物理学家牛顿从物理学的角度研究微积分,他为了解决运动问题,创立了一种和物理概念直接联系的数学理论,即“流数术”的理论,实际上这就是微积分理论. 牛顿指出,“流数术”基本上包括三类问题:

(1) 已知流量之间的关系,求它们的流数的关系,这相当于微分学.

(2) 已知表示流数之间关系的方程,求相应的流量间的关系. 这相当于积分学,牛顿的积分法不仅包括求原函数,还包括解微分方程.

(3) “流数术”应用范围包括计算曲线的极大值、极小值,求曲线的切线和曲率,求曲线长度及计算曲边形面积等.

牛顿已完全清楚上述(1)与(2)两类问题中的运算是互逆的运算,于是建立起微分学和积分学之间的联系. 而德国数学家莱布尼茨则是从几何方面独立发现了微积分. 在牛顿和莱布尼茨之前至少有数十位数学家研究过,他们为微积分的诞生做出了开创性的贡献. 但是,他们这些工作是零散的,不连贯的,缺乏统一性. 莱布尼茨创立微积分的途径和方法与牛顿是不同的. 莱布尼茨是经过研究曲线的切线和曲线包围的面积,运用分析学方法引进微积分概念,得出运算法则的. 牛顿在微积分的应用上更多地结合了运动学,造诣较莱布尼茨高一等,但莱布尼茨的表达形式是采用数学符号却又远远优于牛顿一筹,既简洁又准确地揭示了微积分的实质,强有力地促进了高等数学的发展.

莱布尼茨创造的微积分符号,正像阿拉伯数字促进了算术与代数的发展一样,促进了微积分学的发展. 莱布尼茨是数学史上最杰出的符号创造者之一. 莱布尼茨比别人更早更明确地认识到,好的符号能大大节省思维劳动,运用符号的技巧是数学成功的关键之一.

二、常用积分拓展表

(一)有理函数的积分

1. $\int (ax+b)^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{(ax+b)^{\mu+1}}{a(\mu+1)}+C(\mu\neq -1)$

2. $\int \dfrac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

3. $\int \dfrac{x}{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$

4. $\int \dfrac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a^3}\left[\dfrac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln|ax+b|)\right]+C$

5. $\int \dfrac{1}{x(ax+b)}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{b}\ln\left|\dfrac{ax+b}{x}\right|+C$

6. $\int \frac{1}{x^2(ax+b)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

7. $\int \frac{1}{a^2x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan ax+C(a>0)$

8. $\int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}x+C(a,b>0)$

9. $\int \frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x^2+a^2|+C(a>0)$

10. $\int \frac{x^2}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=x-a^2\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x+C(a>0)$

11. $\int \frac{1}{x(x^2+a^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{|x^2+a^2|}$

12. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C(a>0,b^2<4ac)$

(二)无理函数的积分(其中 $a>0$)

13. $\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

14. $\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

15. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

16. $\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C(b>0)$

17. $\int \frac{1}{x\sqrt{ax-b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{b}}\arctan\sqrt{\frac{ax-b}{b}}+C(b>0)$

18. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x=2\sqrt{ax+b}+b\int\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x$

19. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x$

20. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|})+C$

21. $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C(a<b)$

23. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C(a<b)$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}+C$

26. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

27. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

28. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C$

29. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+a^2}+a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

30. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

31. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}+C$

32. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$

33. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

34. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C$

35. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$

36. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=-\sqrt{a^2-x^2}+C$

37. $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

38. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

39. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}+C$

40. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}+C$

41. $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C$

（三）含有三角函数的积分

42. $\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

43. $\int \cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

44. $\int \sin^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\mathrm{d}x$

45. $\int \cos^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\mathrm{d}x$

46. $\int \frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\mathrm{d}x$

47. $\int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2}x}\mathrm{d}x$

48. $\int x\sin ax\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{1}{a}x\cos ax+C$

49. $\int x^2\sin ax\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}x^2\cos ax+\frac{2}{a^2}x^2\sin ax+\frac{2}{a^3}\cos ax+C$

50. $\int x\cos ax\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{1}{a}x\sin ax+C$

51. $\int x^2\cos ax\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^2\sin ax+\frac{2}{a^2}x^2\cos ax-\frac{2}{a^3}\sin ax+C$

（四）含有反三角函数的积分（其中 $a>0$）

52. $\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x=x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C$

53. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$

54. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$

55. $\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=x\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$

56. $\int x\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a}-\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$

57. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$

58. $\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=x\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$

59. $\int x\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{2}x+C$

60. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a}-\frac{a}{6}x^2+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C$

(五)含有指数函数的积分

61. $\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}(ax-1)\mathrm{e}^{ax}+C$

62. $\int x^n\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}x^n\mathrm{e}^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$

63. $\int xa^x\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln a}a^x-\frac{1}{(\ln a)^2}a^x+C$

64. $\int x^n a^x\mathrm{d}x=\frac{x^n}{\ln a}a^x-\frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x\mathrm{d}x$

65. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

66. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

(六)含有对数函数的积分

67. $\int x^n\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$

68. $\int (\ln x)^n\mathrm{d}x=x(\ln x)^n-n\int (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$

第四章　微分方程

第一节　微分方程的概念

[课前导读]

微积分研究的对象是函数关系，但在实际问题中，往往很难直接得到所研究的变量之间的函数关系，而比较容易建立起这些变量与它们的导数或微分之间的联系，从而得到一个关于未知函数的导数或微分的方程，即微分方程. 通过求解这种方程，同样可以找到指定未知量之间的函数关系. 比如，已知 $y'=\cos 2x$，由不定积分的计算很容易知道 y 的表达式：

$$y=\int\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

但是如果已知 $y'+y=\cos 2x$，仅仅是求原函数的公式是不够的，它需要利用微分方程自己的一些方法和技巧才能得到 y 的表达式.

一、微分方程的引例

在初等数学中，含有未知量的等式称为方程，它表达了未知量所必须满足的某种条件，比如一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，分式方程 $\frac{1}{1+x}+\frac{4x}{1-x^2}=\frac{2}{x+2}$，三角方程 $\sin 3x-3\cos 2x-\tan^2 x+1=0$. 而我们现在要介绍的是含有未知函数的导数的方程，例如

$$y'+y\tan x=\cos x,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4x}{y(x-3)},$$

$$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{3x}.$$

下面通过几个具体的例子来说明微分方程的基本概念.

例 1　一曲线通过点(1，2)(见图 4-1)，且在该曲线上任意一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$，求该曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$. 根据导数的几何意义，可知未知函数 $y=y(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x.\text{（称为一阶微分方程）}\qquad(1)$$

此外，未知函数 $y=y(x)$ 还应满足下列条件：$x=1$ 时，$y=2$，简记为 $y|_{x=1}=2$.（称为初始条件）　(2)

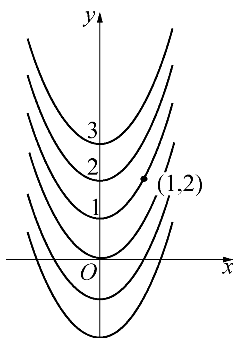


图 4-1

一阶微分方程的概念

把(1)式两端积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x\text{，即 } y=x^2+C,\text{（称为微分方程的通解）} \tag{3}$$

其中 C 是任意常数.

把条件“$x=1$ 时 $y=2$”代入(3)式，得

$$2=1^2+C.$$

由此定出 $C=1$. 把 $C=1$ 代入(3)式，得所求曲线方程

$$y=x^2+1.\text{（称为微分方程满足初始条件 } y\big|_{x=1}=2 \text{ 的特解）}$$

例 2　列车在公路上以 20 m/s(相当于 72 km/h)的速度行驶，当制动时列车获得加速度 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$. 开始制动后多长时间列车才能停住？列车在这段时间里行驶了多少路程？

解　设列车在开始制动后 t 时行驶的距离为 s. 根据题意，反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4.\text{（称为二阶微分方程）} \tag{4}$$

此外，未知函数 $s=s(t)$ 还应满足下列条件：

$$t=0\text{ 时，} s=0,\ v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20.$$

$$\text{简记为 } s\big|_{t=0}=0,\ s'\big|_{t=0}=20.\text{（两个初始条件）} \tag{5}$$

把(4)式两端积分一次，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1; \tag{6}$$

再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2. \tag{7}$$

这里 C_1，C_2 都是任意常数.

把条件 $v\big|_{t=0}=20$ 代入(6)式，得

$$20=C_1.$$

把条件 $s\big|_{t=0}=0$ 代入(7)式，得 $0=C_2$.

把 C_1，C_2 的值代入(6)式、(7)式，得

$$v=-0.4t+20, \tag{8}$$

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{9}$$

二阶微分方程概念

在(8)式中令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}=50\ \mathrm{s}.$$

再把 $t=50$ 代入(9)式，得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=-0.2\times50^2+20\times50=500\ \mathrm{m}.$$

例 3　已知放射性物质镭的裂变规律是裂变速度与余存量成比例. 记在某一时刻 $t=t_0$，镭的余存量为 R_0 g，试确定镭在任意时刻 t 的余存量 $R(t)$.

解　由于$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$是镭的增长速度，因此裂变速度(减少速度)应为$-\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$. 从而按裂变

规律，有$-\frac{dR(t)}{dt}=kR(t)$，其中 k 为比例系数. 要解决上述问题，就要确定 $R(t)$.

上式可写成$\frac{dt}{dR}=-\frac{1}{kR}$，两边对 R 积分：$\int\frac{dt}{dR}dR=-\int\frac{1}{kR}dR$，得 $t=-\frac{1}{k}\ln R+C_1$，其中 C_1 为任意常数. 从而 $R=e^{-kt+kC_1}=Ce^{-kt}$，其中 $C=e^{kC_1}$为任意常数.

由 $R(t_0)=R_0$，得 $C=R_0e^{kt_0}$，因此 $R=R_0e^{-k(t-t_0)}$即为所求.

注　式子$-\frac{dR(t)}{dt}=kR(t)$即为微分方程，它表示函数 $R(t)$的一个变化规律，即其减少速度$-\frac{dR(t)}{dt}$与其本身 $R(t)$成比例. 尽管我们是从镭的裂变这一特殊问题导出此方程，但此方程应用远不止于此. 只要某物理量的变化服从同样的规律，就可用此方程来确定.

上面的几个例子尽管实际意义不同，但是解决问题的方法都是首先建立一个含有未知函数的导数的方程，然后通过这个方程求满足所给的条件的未知函数.

二、微分方程的基本概念

1. 微分方程

含有未知函数及其导数与自变量的等式称为**微分方程**(其中自变量、未知函数可以在方程中不出现，但未知函数的导数必须出现).

2. 微分方程的阶

微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数称为**微分方程的阶**.

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0.$$

例如，方程 $y'-y-x^2=0$，$(y')^2-x^3y^4=0$，$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$ 都是一阶微分方程.

二阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

例如，方程$(y'')^2-y-x^2=0$，$\frac{d^2y}{dx^2}-2y\cdot\frac{dy}{dx}+\sin x=0$ 都是二阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0,\tag{10}$$

其中，x 为自变量，$y=y(x)$是未知函数. 在方程(10)中，$y^{(n)}$必须出现，而其他变量可以不出现，如 n 阶方程 $y^{(n)}=e^x$.

如果能从方程(10)中解出最高阶导数，就得到微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).\tag{11}$$

以后我们讨论的微分方程组主要是形如(11)式的微分方程，并且假设(11)式右端的表达式 f 在所讨论的范围内连续.

如果方程(11)可表示为如下形式：

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=g(x),\tag{12}$$

则称方程(12)为 n 阶线性微分方程. 其中, $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$ 和 $g(x)$ 均为自变量 x 的已知函数.

不能表示成形如(12)式的微分方程, 统称为非线性方程.

3. 微分方程的解

在研究实际问题时, 首先要建立属于该问题的微分方程, 然后找出满足该微分方程的函数(解微分方程), 也就是说, 把这个函数代入微分方程能使方程成为恒等式, 称这个函数为该**微分方程的解**. 更确切地说, 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数, 如果在区间 I 上, 有

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(10)在区间 I 上的解.

微分方程的解可能含有也可能不含有任意常数. 含有相互独立的任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相等的解称为微分方程的**通解**(一般解). 一般地, 微分方程的不含有任意常数的解称为微分方程的**特解**. 方程的通解是一类解, 而不是指方程的“全部解”. 实际上, 我们在求解方程时得到一些解, 很难说明这些解是否构成了方程的“全部解”, 这种工作有时会比求解方程本身还困难, 而实际工作中又告诉我们无须去做这样的工作, 因此我们将关注点放在求方程的通解和特解上.

注　这里所说的相互独立的任意常数, 是指它们不能通过合并而使得通解中的任意常数的个数减少.

4. 微分方程的初值问题

许多实际问题都要求寻找满足某些附加条件的解, 此时, 这类附加条件就可以用来确定通解中的任意常数, 这类附加条件称为**初始条件**. 例如, 条件(2)和(5)分别是微分方程(1)和(4)的初始条件.

带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**.

5. 微分方程的积分曲线

微分方程的解的图形是一条曲线, 称为微分方程的**积分曲线**. 由于通解中含有任意常数, 所以它的图形是具有某种共同性质的积分曲线族. 例如, 例 1 中的通解 $y=x^2+C$ 是抛物线族, 这些图形的共性是每一条抛物线上任意一点 $M(x, y)$ 处的斜率均为 $2x$. 而该方程的特解是过点(1, 2)的一条抛物线, 也就是说, 特解是积分曲线中满足初始条件的某一条特定的积分曲线(见图 4-1).

例 4　设一物体的温度为 100 ℃, 将其放置在空气温度为 20 ℃的环境中冷却. 根据冷却定律: 物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比, 设物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$, 则可建立起函数 $T(t)$ 满足的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20), \tag{13}$$

其中 $k(k>0)$ 为比例常数. 这就是**物体冷却的数学模型**.

根据题意, $T=T(t)$ 还需满足条件

$$T\big|_{t=0}=100. \tag{14}$$

例 5　设一质量为 m 的物体只受重力的作用由静止开始自由垂直降落. 根据牛顿第二定律: 物体所受的力 F 等于物体的质量 m 与物体运动的加速度 a 成正比, 即 $F=ma$, 若取

物体降落的铅垂线为 x 轴，其正向朝下，物体下落的起点为原点，并设开始下落的时间是 $t=0$，物体下落的距离 x 与时间 t 的函数关系为 $x=x(t)$（见图 4-2），则可建立起函数 $x(t)$ 满足的微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g,$$

其中 g 为重力加速度常数. 这就是**自由落体运动的数学模型**.

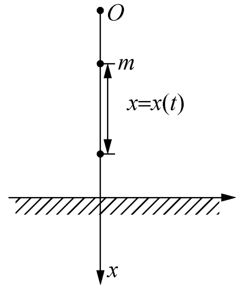


图 4-2

根据题意，$x=x(t)$ 还需满足条件

$$x(0)=0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0.$$

例 6　试指出下列方程是什么方程，并指出微分方程的阶数.

（1）$\dfrac{dy}{dx}=x^2+y$；　　（2）$x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2\dfrac{dy}{dx}+4x=0$；

（3）$x\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+5xy=0$；　　（4）$\cos(y'')+\ln y=x+1$.

解　（1）该方程是一阶线性微分方程，因方程中含有的 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 y 都是一次方.

（2）该方程是一阶非线性微分方程，因方程中含有 $\dfrac{dy}{dx}$ 的平方项.

（3）该方程是二阶非线性微分方程，因方程中含有 $\dfrac{dy}{dx}$ 的三次方.

（4）该方程是二阶非线性微分方程，因方程中含有非线性函数 $\cos(y'')$ 和 $\ln y$.

例 7　验证函数 $y=(x^2+C)\sin x$（C 为任意常数）是方程

$$\frac{dy}{dx}-y\cot x-2x\sin x=0$$

的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$ 的特解.

解　要验证一个函数是否是方程的通解，只要将函数代入方程，看是否恒等，再看函数式中所含的独立的任意常数的个数是否与方程的阶数相同. 对 $y=(x^2+C)\sin x$ 求一阶导数，得

$$\frac{dy}{dx}=2x\sin x+(x^2+C)\cos x.$$

把 y 和 $\dfrac{dy}{dx}$ 代入方程左边得

$$\frac{dy}{dx}-y\cot x-2x\sin x=2x\sin x+(x^2+C)\cos x-(x^2+C)\sin x\cot x-2x\sin x\equiv 0.$$

因方程两边恒等，且 y 中含有一个任意常数，故 $y=(x^2+C)\sin x$ 是题设方程的通解.

将初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$ 代入通解 $y=(x^2+C)\sin x$ 中，

$$得\ 0=\frac{\pi^2}{4}+C,\ 从而\ C=-\frac{\pi^2}{4}.$$

从而所求特解为

$$y=\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\sin x.$$

习题 4-1

1. 选择题

(1) 微分方程 $xy'''+(y'')^2=x^5$ 的阶数是(　　);

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

(2) 微分方程 $3y^2\mathrm{d}y+3x^2\mathrm{d}x=0$ 的阶数是(　　);

A. 1　　B. 3　　C. 2　　D. 0

(3) 下列方程中, 不是微分方程的是(　　);

A. $(y')^2+3y=0$　　B. $\mathrm{d}y+\frac{1}{x}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}x$　　C. $y''=\mathrm{e}^{x-y}$　　D. $x^2+y^2=K^2$

(4) 下列函数中, (　　)是微分方程 $\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x=0$ 的解;

A. $y=2x$　　B. $y=-2x$　　C. $y=-x$　　D. $y=x^2$

(5) 方程$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^x=1$ 的通解应该包含的常数的个数为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 1　　D. 0

2. 指出下列方程哪些是微分方程, 并指出方程的阶数.

(1) $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos x+y\sin x=0$;

(3) $y^2-\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$;

(4) $3y^2\mathrm{d}y+3x^2\mathrm{d}x=1$;

(5) $(x-2y)y'''=2x^4-y$;

(6) $y'=3y^{\frac{2}{3}}$.

3. 验证函数 $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$ 是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$ 的解. 并求满足初始条件 $x\big|_{t=0}=A$, $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$ 的特解.

4. 确定下列函数中 C_1, C_2 的值, 使得函数满足所给定的条件.

(1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$, $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=3$;

(2) $y=(C_1+xC_2)\mathrm{e}^{2x}$, $y\big|_{x=0}=0$, $y'\big|_{x=0}=1$.

5. 试求下列微分方程在指定形式下的解.

(1) $y''+3y'+2y=0$, 形如 $y=\mathrm{e}^{rx}$的解;

(2) $x^2y''+6xy'+4y=0$, 形如 $y=x^\lambda$ 的解.

6. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程.

(1) 曲线在点(x, y)处的切线的斜率等于该点的横坐标的平方;

(2) 曲线在点 $P(x, y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q, 且线段 PQ 被 y 轴平分;

(3) 曲线在点 $M(x, y)$处的切线与 x 轴、y 轴的交点分别为 P、Q, 线段 PQ 被点 M 平分, 且曲线通过点$(3, 1)$.

7. 已知曲线过点$(1, 2)$, 且在该曲线上任意点(x, y)处的切线斜率为 $3x^2$, 求此曲线方程.

第二节　一阶微分方程

［课前导读］

微分方程的类型是多种多样的，它们的解法也各不相同. 本节将根据一阶微分方程的不同类型给出相应的解法，主要介绍可分离变量的微分方程、齐次方程、一阶线性微分方程.

一、可分离变量的微分方程

设有一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$，如果其右端表达式能分解成$F(x,y)=f(x)g(y)$，即有$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$，从而能够写成

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \tag{1}$$

的微分方程称为**可分离变量的微分方程.**

微分方程(1)的特征是左端只含有 y 的函数和 y 的微分 dy，右端只含有 x 的函数和 x 的微分 dx. 设函数 $g(y)$，$f(x)$是连续的，两边同时积分，即有

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx.$$

方程两边同时求原函数便得到关于 x，y 的方程，它便是微分方程(1)的通解.

例 1　求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解　所给方程是可分离变量的微分方程.

分离变量得

$$\frac{dy}{y}=2xdx(y\neq0),$$

两端积分，
$$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,$$

则有
$$\ln|y|=x^2+C_1.$$

两边取指数函数，

$$y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}\cdot e^{x^2}.$$

记 $C=\pm e^{C_1}$，它仍然是任意常数，则得到题设方程的通解 $y=Ce^{x^2}$(这个通解包含$y=0$ 时的情形).

注　为了书写方便，可以不必先取绝对值 $\ln|y|$，再去掉绝对值符号后令 $C=\pm e^{C_1}$，而在两边积分时就写成 $\ln y$，把常数 C_1 写成 $\ln C$，这样方程 $\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$ 的解为 $\ln y=x^2+\ln C$，即可得到 $y=Ce^{x^2}$. 但要记住，最后得到的常数 C 是可以取负值的任意常数. 以后遇到这种情况，均可以这样表示.

例 2 求微分方程 $dx+xydy=y^2dx+ydy$ 的通解.

解 先合并 dx 及 dy 的各项，得 $y(x-1)dy=(y^2-1)dx$.

设 $y^2-1\neq 0$，$x-1\neq 0$，分离变量得

$$\frac{y}{y^2-1}dy=\frac{1}{x-1}dx.$$

两端积分，$\int\frac{y}{y^2-1}dy=\int\frac{1}{x-1}dx$，得

$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\ln(x-1)+\ln C,$$

则得到题设方程的通解：$y^2-1=C(x-1)^2$.

注 在用分离变量法解可分离变量的微分方程的过程中，我们在假定 $g(y)\neq 0$ 的前提下，用它除方程两边，这样得到的通解不包含使 $g(y)=0$ 的特解. 但是，有时如果扩大任意常数 C 的取值范围，则其失去的解仍包含在通解中. 如例 2 中得到的通解中应该满足 $C\neq 0$，但这样方程就失去特解 $y=\pm 1$；而如果允许 $C=0$，则 $y=\pm 1$ 仍包含在通解 $y^2-1=C(x-1)^2$ 中.

例 3 求 $(1+e^x)yy'=e^x$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的特解.

解 方程属于可分离变量的微分方程. 分离变量，可得

$$y dy=\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

积分：

$$\int y dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

所以通解为

$$\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+\ln C=\ln C(1+e^x).$$

再由 $y|_{x=0}=0$，得

$$0=\ln(2C)，即 C=\frac{1}{2}.$$

故所求特解为

$$\frac{y^2}{2}=\ln\frac{1+e^x}{2}.$$

例 4 已知 $f'(\sin^2x)=\cos 2x+\tan^2x$，当 $0<x<1$ 时，求 $f(x)$.

解 设 $y=\sin^2x$，则 $\cos 2x=1-2\sin^2x=1-2y$，

$$\tan^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{\sin^2x}{1-\sin^2x}=\frac{y}{1-y}.$$

所以原方程变为 $f'(y)=1-2y+\frac{y}{1-y}$，即 $f'(y)=-2y+\frac{1}{1-y}$.

所以

$$f(y)=\int\left(-2y+\frac{1}{1-y}\right)dy=-y^2-\ln(1-y)+C,$$

故

$$f(x)=-[x^2+\ln(1-x)]+C(0<x<1).$$

二、齐次方程

有的微分方程通过适当的变量代换后，也可以转化为可分离变量的方程.

例 5　求微分方程 $x(\ln x-\ln y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$ 的通解.

解　原方程变形为 $\ln\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y+\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x=0$.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

代入原方程并整理，得$\dfrac{\ln u}{u(\ln u+1)}\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

两边积分得

$$\int\frac{\ln u}{u(\ln u+1)}\mathrm{d}u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

即

$$\int\frac{\ln u}{\ln u+1}\mathrm{d}\ln u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

从而

$$\int\left(1-\frac{1}{\ln u+1}\right)\mathrm{d}\ln u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

故方程通解为

$$\ln u-\ln(\ln u+1)=-\ln x+\ln C,$$

即

$$y=C(\ln u+1),$$

变量回代得所求通解：

$$y=C\left(\ln\frac{y}{x}+1\right).$$

由例 5 可知，如果一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$中的表达式$f(x,y)$可化为$\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，则通过变量替换 $u=\dfrac{y}{x}$或转化为可分离变量方程求解.我们称形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$的微分方程为**齐次方程**.

在齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$中，令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=ux$，有

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u).$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

求出积分后，再用$\dfrac{y}{x}$代替 u，便得所给齐次方程的通解.

例 6　求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$满足初始条件$y\big|_{x=1}=\dfrac{\pi}{6}$的特解.

解　所求方程为齐次方程，设 $u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

代入原方程得
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\tan u,$$
分离变量得
$$\cot u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$
两边积分得
$$\ln(\sin u)=\ln x+\ln C,$$
即
$$\sin u=Cx.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 回代，则得到题设方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx$.

利用初始条件 $y|_{x=1}=\frac{\pi}{6}$，得到 $C=\frac{1}{2}$，
从而所求题设方程的特解为 $\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x$.

例 7　求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$.

解　原方程变形为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，方程化为 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}$，
分离变量得 $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}\right]\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，
两边积分得
$$\ln(u-1)-\frac{3}{2}\ln(u-2)-\frac{1}{2}\ln u=\ln x+\ln C,$$
整理得
$$\frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx.$$

所求微分方程的解为 $(y-x)^2=Cy(y-2x)^3$.

例 8　利用变量代换法求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$ 的通解.

解　令 $x+y=u$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$，代入原方程得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+u^2$，
分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x$，两边积分得 $\arctan u=x+C$，回代得 $\arctan(x+y)=x+C$，
故原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$.

三、一阶线性微分方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{2}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**. 其中函数 $P(x)$, $Q(x)$ 是某一区间 I 上的连续函数. 当 $Q(x)\equiv 0$ 时, 方程(2)成为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0, \tag{3}$$

这个方程称为一阶齐次线性微分方程. 相应地, 当 $Q(x)\neq 0$ 时, 方程(2)称为一阶非齐次线性微分方程. 方程(3)称为方程(2)所对应的齐次方程.

先求一阶齐次线性微分方程(3)的通解.

方程(3)是一个可分离变量的方程. 分离变量, 有

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx.$$

两端积分, 得

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C,$$

故一阶齐次线性微分方程(3)的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

其中 C 为任意常数.

容易验证, 不论 C 取什么值, $y=Ce^{-\int P(x)dx}$ 只能是齐次线性方程的解. 如果希望非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 具有类似 $Ce^{-\int P(x)dx}$ 结构的解, 那么 C 不应该是常数, 而应该是 x 的函数, 只要能够确定这个函数即可.

设一阶非齐次方程的通解为

$$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{4}$$

于是
$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)].$$

把 y, y' 的表达式代入方程(2), 得

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)]+P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

即 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$ 或 $u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$.

积分可得
$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

将所得的 $u(x)$ 代入方程(4)中, 得到一阶非齐次线性微分方程的通解公式:

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}. \tag{5}$$

上述求解一阶非齐次线性微分方程通解的方法称为常数变易法, 即在求出对应齐次方程的通解后, 将通解中的常数 C 变易为待定函数 $u(x)$, 然后求出非齐次线性方程的通解的方法.

将一阶非齐次线性方程的通解(5)展开, 得

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

一阶非齐次线性方程(2)的通解由两部分组成. 第一项是对应的齐次线性方程(3)的通解. 第二项可以看成在一阶非齐次线性方程(2)的通解中取 $C=0$ 得到的，所以它是一阶非齐次线性方程(2)的一个特解. 于是得到如下结论.

定理　(一阶非齐次线性方程的解的结构)　一阶非齐次线性方程(2)的通解等于对应的齐次线性方程(3)的通解与一阶非齐次线性方程(2)的一个特解之和.

例 9　求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解　这是一个非齐次线性方程. 先求对应齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}\Rightarrow\ln y=2\ln(x+1)+\ln C\Rightarrow y=C\ (x+1)^2.$$

用常数变易法，把 C 换成 u，即令 $y=u\ (x+1)^2$，则有 $\frac{dy}{dx}=u'(x+1)^2+2u(x+1)$，

代入所给非齐次方程得 $u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$，两端积分得 $u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$，故原方程的通解为 $y=\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)(x+1)^2$.

例 10　求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

$$x\ln x dy+(y-\ln x)dx=0,\ y\Big|_{x=e}=1.$$

解　将方程标准化为 $y'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x}$，于是

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x\ln x}}\left(\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}dx+C\right)=e^{-\ln(\ln x)}\left[\int\frac{1}{x}e^{\ln(\ln x)}dx+C\right]=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\ln^2x+C\right).$$

由初始条件 $y\Big|_{x=e}=1$，得 $C=\frac{1}{2}$，故所求特解为 $y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$.

例 11　求方程 $y^3dx+(2xy^2-1)dy=0$ 的通解.

解　当将 y 看作 x 的函数时，方程变为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{1-2xy^2}.$$

这个方程不是一阶线性微分方程，不便求解. 如果将 x 看作 y 的函数，方程改写为

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{1}{y^3}.$$

这个方程为一阶线性微分方程. 令 $P(y)=\frac{2}{y}$，$Q(y)=\frac{1}{y^3}$.

由公式得原方程的通解为

$$x=e^{-\int P(y)dy}\left[C+\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy\right]=e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left[C+\int\frac{1}{y^3}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy\right],$$

故得 $x=\frac{1}{y^2}(\ln y+C)$，其中 C 为任意常数.

习题 4-2

1. 求下列可分离变量微分方程的通解：

（1）$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$；

（2）$xy'+y=0$；

（3）$x\mathrm{d}y+\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}x$；

（4）$\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}y-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}x=0$；

（5）$y'=\mathrm{e}^{x+y}$；

（6）$y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$；

（7）$\cos^2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$；

（8）$x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$.

2. 求下列齐次方程的通解：

（1）$y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

（2）$\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$；

（3）$x(\ln x-\ln y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$；

（4）$\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-x\cos\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y=0$.

3. 求下列一阶线性微分方程的通解：

（1）$y'-\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{1+x}$；

（2）$y'=-2xy+2x\mathrm{e}^{-x^2}$；

（3）$y'+y=\mathrm{e}^{-x}$；

（4）$y'+2xy=4x$；

（5）$xy'=x-y$；

（6）$(x^2+1)y'+2xy=4x^2$；

（7）$xy'+(1-x)y=\mathrm{e}^{2x}$；

（8）$(y^2-6x)y'+2y=0$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$\begin{cases}y'\sin x=y\ln y,\\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e};\end{cases}$

（2）$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\,y'=x,\\ y\big|_{x=0}=0;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}(y+3)\mathrm{d}x+\cot x\mathrm{d}y=0,\\ y\big|_{x=0}=1;\end{cases}$

（4）$\begin{cases}\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0,\\ y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

（5）$\begin{cases}y'=\mathrm{e}^{2x-y},\\ y\big|_{x=0}=0;\end{cases}$

（6）$\begin{cases}xy'+y=3,\\ y\big|_{x=1}=0;\end{cases}$

（7）$\begin{cases}y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy},\\ y\big|_{x=1}=1;\end{cases}$

（8）$\begin{cases}\sin x\cos y\mathrm{d}x=\cos x\sin y\mathrm{d}y,\\ y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

（9）$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\tan x=\sec x,\\ y\big|_{x=0}=0;\end{cases}$

（10）$\begin{cases}xy'+y=\sin x,\\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0;\end{cases}$

(11) $\begin{cases} 2xy'=y-x^3, \\ y\big|_{x=1}=0; \end{cases}$　　(12) $\begin{cases} x^2y'+(1-2x)y=x^2, \\ y\big|_{x=1}=0; \end{cases}$

(13) $\begin{cases} y'\cos^2x+y=\tan x, \\ y\big|_{x=0}=0; \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} y'+y\cot x=5e^{\cos x}, \\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4. \end{cases}$

5. 一曲线通过点(2, 3)，它在两坐标轴之间的任意切线均被切点所平分，求该曲线的方程.

6. 求一曲线方程，该曲线过原点，并且它在点(x, y)处的切线斜率等于$2x+y$.

7. 方程$\int_0^x \left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]dt=xy(x)$是否为齐次方程？

*8. 求微分方程$y'=\frac{1}{2}\tan^2(x+2y)$的通解.

*9. 求微分方程$\frac{dy}{dx}+\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}$的通解.

第三节　二阶微分方程

[课前导读]

对一般的二阶微分方程没有普遍的解法，本节讨论几种特殊形式的二阶微分方程.

可降阶微分方程经过适当的变量替换可降为一阶微分方程，然后求解一阶微分方程，再将变量回代，从而求得所给二阶微分方程的解.

而在学习二阶线性微分方程的时候，我们需要先了解一下欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

这是个联系指数函数和三角函数的桥梁，在这一节的公式证明中会用到这个公式.

一、可降阶的二阶微分方程

二阶及二阶以上的微分方程统称为**高阶微分方程**. 高阶微分方程在工程技术中有着广泛的应用. 高阶微分方程的求解问题一般比一阶微分方程复杂，能够求解的类型也不多. 本小节介绍三种可降阶的二阶微分方程的解法.

1. $y''=f(x)$型

在方程$y''=f(x)$两端积分，得

$$y'=\int f(x)\,dx+C_1.$$

再次积分，得

$$y=\int\left[\int f(x)\,dx+C_1\right]dx+C_2.$$

这种类型的方程的解法，可推广到n阶微分方程.

例 1 求方程 $y''=e^{2x}-\cos x$ 满足 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解.

解 对所给方程接连积分两次，得

$$y'=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1, \tag{1}$$

$$y=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2, \tag{2}$$

在(1)式中代入条件 $y'(0)=1$，得 $C_1=\frac{1}{2}$；在(2)式中代入条件 $y(0)=0$，得 $C_2=-\frac{5}{4}$. 从而所求题设方程的特解为

$$y=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}.$$

2. $y''=f(x, y')$ 型

这种方程的特点是不显含未知函数 y，求解的方法是：

作代换，令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$，原方程化为$\frac{dp}{dx}=f(x, p)$，这是关于 x，p 的一阶微分方程. 若可用前面的方法求解，并设可得到的通解可写成 $p=\varphi(x, C_1)$，则原方程的通解为 $y=\int\varphi(x, C_1)\,dx+C_2$.

例 2 求微分方程 $y''=1+y'^2$ 的通解.

解 令 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}$，则方程为$\frac{dp}{dx}=1+p^2$，即$\frac{dp}{1+p^2}=dx$，两边积分得 $\arctan p=x+C_1$，也即 $p=\tan(x+C_1)$，故 $y=\int\tan(x+C_1)\,dx=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$.

例 3 求微分方程

$$(1+x^2)y''=2xy',\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=3$$

的特解.

解 题设方程属于 $y''=f(x, y')$ 型. 设 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$代入方程并分离变量后，有

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

两端积分，得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+C$，即 $p=y'=C_1(1+x^2)\ (C_1=\pm e^C)$.

由条件$y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，所以 $y'=3(1+x^2)$.

两端再积分，得 $y=x^3+3x+C_2$. 又由条件$y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，于是所求的特解为 $y=x^3+3x+1$.

3. $y''=f(y, y')$ 型

这种方程的特点是不显含自变量 x. 解决的方法是作代换，令 $y'=p$，则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

原方程化为 $p\frac{dp}{dy}=f(y, p)$，这是关于 y，p 的一阶微分方程. 若可用前面的方法求解，并

设可得到的通解可写成 $p=\varphi(y,\ C_1)$，则原方程的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,\ C_1)}=x+C_2.$$

例 4　求微分方程 $y''=\dfrac{2y-1}{y^2+1}y'^2$ 的通解.

解　令 $y'=p$，$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2y-1}{y^2+1}p^2$（$p=0$ 时，$y=C$）.

当 $p\neq0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2y-1}{y^2+1}\mathrm{d}y$，积分得 $\ln|p|=\ln(1+y^2)-\arctan y+C$，

即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=C_1(1+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan y}$. 分离变量得$\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan y}}{1+y^2}\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$，故通解为

$$\mathrm{e}^{\arctan y}=C_1x+C_2.$$

例 5　求微分方程 $yy''=2(y'^2-y')$ 满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的特解.

解　令 $y'=p$，由 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$代入方程并化简得

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(p-1).$$

上式为可分离变量的一阶微分方程，解得 $p=y'=Cy^2+1$.

再分离变量，得$\dfrac{\mathrm{d}y}{Cy^2+1}=\mathrm{d}x$.

由初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$，解得 $C=1$，从而得$\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\mathrm{d}x$.

再两边积分，得 $\arctan y=x+C_1$ 或 $y=\tan(x+C_1)$.

由 $y(0)=1$ 解得 $C_1=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，从而所求特解为 $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

二、线性微分方程解的结构

1. 函数组的线性相关与线性无关

为了理解线性微分方程的解的结构，先解释一下函数组的线性相关与线性无关等概念.

设 $y_i(x)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）为定义在区间 I 上的 n 个函数，如果存在 n 个不全为零的常数 k_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$），使得

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0$$

在区间 I 上恒成立，则称 n 个函数 $y_i(x)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）在 I 上线性相关，否则称线性无关. 或者说要使 $k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0$ 在区间 I 上恒成立，则必有

$$k_i=0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

例 6　证明 1、$\cos^2x$、$\sin^2x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内线性相关.

证明　$\cos^2x+\sin^2x-1=0$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内恒成立，可看作存在不全为零的数 1，1，−1，使 $1\cdot\cos^2x+1\cdot\sin^2x-1\cdot1=0$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内恒成立. 因此 1、$\cos^2x$、$\sin^2x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$

内线性相关.

对于两个函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，如果$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\equiv k\in\mathbf{R}$，那么它们线性相关，否则就线性无关.

2. 解的结构

二阶线性常系数微分方程的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+qy=f(x),\tag{3}$$

其中 p、q 是常数，$f(x)$ 是自变量 x 的函数，函数 $f(x)$ 称为方程(1)的**自由项**. 当 $f(x)\equiv0$ 时，方程(1)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+qy=0.\tag{4}$$

这个方程称为二阶齐次线性微分方程. 相应地，当 $f(x)\neq0$ 时，方程(1)称为二阶非齐次线性微分方程.

定理 1　如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(2)的两个解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\tag{5}$$

也是方程(2)的解，其中 C_1，C_2 是任意常数.

证明　因为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(2)的两个解，所以

$$y_1''+py_1'+qy_1=0,\ y_2''+py_2'+qy_2=0.$$

将(3)式代入(2)式左端，得

$$\begin{aligned}\text{左端}&=(C_1y_1''+C_2y_2'')+p(C_1y_1'+C_2y_2')+q(C_1y_1+C_2y_2)\\&=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2)\\&=C_1\cdot0+C_2\cdot0=0=\text{右端},\end{aligned}$$

故 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程(2)的解.

例 7　对于二阶线性微分方程

$$y''-3y'+2y=0,$$

验证 $y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=\mathrm{e}^{2+x}$ 是它的解，并证明 $C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 是原方程的通解，而 $C_1\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{2+x}$ 是原方程的解但不是通解.

证明　把 $y_1=\mathrm{e}^x$ 代入方程的左端，得

$$y''-3y'+2y=(\mathrm{e}^x)''-3(\mathrm{e}^x)'+2(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x\equiv0,$$

故 $y_1=\mathrm{e}^x$ 是 $y''-3y'+2y=0$ 的解.

同理，$y''-3y'+2y=(\mathrm{e}^{2x})''-3(\mathrm{e}^{2x})'+2\mathrm{e}^{2x}=4\mathrm{e}^{2x}-3\cdot2\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{2x}\equiv0$,

$y''-3y'+2y=(\mathrm{e}^{2+x})''-3(\mathrm{e}^{2+x})'+2\mathrm{e}^{2+x}=\mathrm{e}^{2+x}-3\mathrm{e}^{2+x}+2\mathrm{e}^{2+x}\equiv0$,

所以 $y_2=\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=\mathrm{e}^{2+x}$ 也是原微分方程的解.

由定理 1 可得，$C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 是原方程的解. 又因为两个任意常数 C_1，C_2 不可能合并为一个任意常数，而所给的方程是二阶的，因此 $C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$ 是 $y''-3y'+2y=0$ 的通解.

而 $C_1\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{2+x}=C_1\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^x=C\mathrm{e}^x$（其中 $C=C_1+C_3\mathrm{e}^2$）实质上只含有一个任意常数，故 $C_1\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{2+x}$ 是微分方程的解但不是通解.

由例 7 可知，$\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{e^x}{e^{2x}}=e^{-x}$不恒为常数($y_1=e^x$ 与 $y_2=e^{2x}$线性无关)，所以 $C_1y_1+C_2y_2$ 是 $y''-3y'+2y=0$ 的通解. 而$\dfrac{y_3}{y_1}=\dfrac{e^{2+x}}{e^x}=e^2$ 恒为常数($y_1=e^x$ 与 $y_3=e^{2+x}$线性相关)，所以 $C_1y_1+C_3y_3$ 中的常数可以合并为一个常数，从而它不能构成原方程的通解.

对于一般的情形，有如下定理.

定理 2　如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(2)的两个线性无关的特解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$就是方程(2)的通解，其中 C_1，C_2 是任意常数.

例 8　已知 $y_1=e^{2x}+e^{-x}$，$y_2=2e^{2x}+e^{-x}$，$y_3=2e^{2x}$是某二阶齐次线性微分方程的三个特解.

(1) 求此方程的通解；

(2) 求此微分方程满足 $y(0)=7$，$y'(0)=5$ 的特解.

解　(1) 由题设知，$e^{2x}=y_2-y_1$，$e^{-x}=y_2-y_3$ 是相应齐次线性方程的两个线性无关的解，故所求方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$，其中 C_1，C_2 是任意两个常数.

(2) 将 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$和 $y'=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}$代入初始条件 $y(0)=7$，$y'(0)=5$，得

$$C_1+C_2=7,\ 2C_1-C_2=5\Rightarrow C_1=4,\ C_2=3,$$

从而所求特解为 $y=4e^{2x}+3e^{-x}$.

定理 3　设 y^* 是方程(1)的一个特解，而 Y 是其对应的齐次方程(2)的通解，则

$$y=Y+y^*$$

就是二阶非齐次线性微分方程(1)的通解.

例 9　已知 y_1，y_2，y_3 是二阶变系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的线性无关的三个特解，试写出该方程的通解.

解　由定理 2 知，y_2-y_1、y_3-y_1 是对应齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的特解，且 y_2-y_1、y_3-y_1 线性无关（否则，若 y_2-y_1、y_3-y_1 线性相关，则有 $y_3-y_1=C(y_2-y_1)$，即$(C-1)y_1-Cy_2+y_3=0$，其中 $C-1$、$-C$、1 不全为零，即 y_1、y_2、y_3 线性相关，矛盾)，故 $Y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)$ 是对应齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解. 因此 $y=Y+y^*=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)+y_1$ 就是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的通解.

* **定理 4**　设 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的特解.

三、二阶常系数齐次线性微分方程的解法

现在我们研究二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解法. 如何求得方程的两个线性无关的特解呢？我们知道，指数函数 $y=e^{rx}$(r 为常数)的各阶导数仍为指数函数 e^{rx}乘一个常数. 又因为方程的系数 p，q 都是常数，因此，要使方程的左端 $y''+py'+qy=0$，可以

设想方程的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{rx}$，其中 r 为待定的常数.

把 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 代入方程 $y''+py'+qy=0$，得

$$(\mathrm{e}^{rx})''+p(\mathrm{e}^{rx})'+q\mathrm{e}^{rx}=0,\text{ 即 } \mathrm{e}^{rx}(r^2+pr+q)=0.$$

由于 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$，故得

$$r^2+pr+q=0.$$

这就是说，只要待定系数 r 满足方程，所得到的函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 就是微分方程的解. 称上面的一元二次方程为微分方程的**特征方程**，特征方程的根称为方程的**特征根**.

由于特征方程是一元二次方程，它的根为 $r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$，所以特征根 r_1，r_2 就有三种不同的情形. 现在分别讨论如下.

（1）当 $p^2-4q>0$ 时，特征方程有两个不相等的实根：$r_1\neq r_2$.

这时方程有两个特解 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$，$y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$. 又 $\dfrac{y_1}{y_2}=\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}$ 不恒为常数，则方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

例 10　求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解　所给微分方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$，
其根 $r_1=-1$，$r_2=3$ 是两个不相等的实根，因此所求通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$.

（2）当 $p^2-4q=0$ 时，特征方程有两个相等的实根：$r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$.

这时只能得到方程的一个特解 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$，还要找出与 y_1 线性无关的另一个特解 y_2(满足 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 不是恒常数的 y_2).

设 $y_2=u(x)\mathrm{e}^{r_1x}$(这时 $\dfrac{y_2}{y_1}=u(x)$ 不恒为常数)是方程的另一个解.

由 $y_2=u(x)\mathrm{e}^{r_1x}$ 求导，得

$$y_2'=\mathrm{e}^{r_1x}(u'+r_1u),$$

$$y_2''=\mathrm{e}^{r_1x}(u''+2r_1u'+r_1^2u).$$

将 y_2，y_2' 和 y_2'' 代入方程，得

$$\mathrm{e}^{r_1x}[(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu]=0,$$

整理得

$$u''+(2r_1+p)u'+(r_1^2+pr_1+q)u=0.$$

因为 r_1 是特征方程的重根，所以有

$$r_1^2+pr_1+q=0$$

和

$$2r_1+p=0.$$

即得

$$u''=0$$

积分两次，得

$$u=C_1x+C_2,$$

其中 C_1，C_2 为任意常数. 因为只需要找出一个与 y_1 线性无关的特解，也就是找出一个不为

常数的 $u(x)$，所以可取 $C_1=1$，$C_2=0$. 取 $u(x)=x$ 即可，由此得到方程的另一个特解：

$$y_2=xe^{r_1x}.$$

故当特征根 $r_1=r_2$ 时，方程的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x},$$

或写成

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x},$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

例 11　求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2+4r+4=0$，

解得

$$r_1=r_2=-2,$$

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

（3）当 $p^2-4q<0$ 时，特征方程有一对共轭复根：$r_1=\alpha+\beta i$，$r_2=\alpha-\beta i$.

这时，$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}$，$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}$是方程的两个复值函数的特解.

为了得出实值函数形式的特解，根据欧拉公式

$$e^{\beta i}=\cos\beta+i\sin\beta,$$

将 y_1 与 y_2 改写为

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$

$$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

取方程的另两个特解：

$$\overline{y_1}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\overline{y_2}=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$\frac{\overline{y_2}}{\overline{y_1}}=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x}=\tan\beta x\text{（不恒为常数）},$$

即$\overline{y_1}$与$\overline{y_2}$线性无关，从而得到当特征根 r_1 与 r_2 为共轭复根时，方程的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

综上所述，求二阶常系数齐次线性方程的通解的步骤如下：

$$y''+py'+qy=0$$

（1）写出特征方程 $r^2+pr+q=0$；

（2）求出特征根 r_1，r_2；

（3）按表 4-1 写出微分方程的通解.

表 4-1

$r^2+pr+q=0$	$y''+py'+qy=0$
$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

这种根据二阶常系数齐次线性方程的特征方程的根直接确定其通解的方法称为**特征方程法**.

例 12　求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解　特征方程为

$$r^2+2r+5=0,$$

解得

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times5}}{2}=-1\pm2\mathrm{i},$$

故所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x).$$

例 13　求微分方程

$$4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$$

满足初始条件

$$y\bigg|_{x=0}=1,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=3$$

的特解.

解　特征方程为

$$4r^2-4r+1=0,\ \text{即}(2r-1)^2=0.$$

特征根为 $r_1=r_2=\dfrac{1}{2}$，因此，所给方程的通解为

$$y=(C_1+xC_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

为了求特解，将上式对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}(C_1+xC_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

将初始条件 $y\bigg|_{x=0}=1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=3$ 分别代入以上两式，得

$$C_1=1,\ C_2=\frac{5}{2}.$$

于是所求满足初始条件的特解为

$$y=\left(1+\frac{5}{2}x\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

*四、n 阶常系数齐次线性微分方程的解法

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0. \tag{6}$$

其特征方程为

$$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0. \tag{7}$$

根据特征方程的根，可按表 4-2 直接写出其对应的微分方程的解.

表 4-2

特征方程的根	通解中的对应项
k 重根 r	$(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$
k 重共轭复根 $\alpha\pm i\beta$	$[(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x+(D_0+D_1x+\cdots+D_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x]e^{\alpha x}$

注　n 次代数方程有 n 个根，而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项，且每一项各含一个任意常数. 这样就得到 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n.$$

其中 y_1，y_2，…，y_n 是 n 个线性无关的解.

例 14　求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^4-2r^3+5r^2=0$，即 $r^2(r^2-2r+5)=0$.
特征根是 $r_1=r_2=0$ 和 $r_{3,4}=1\pm2i$，因此所给微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos2x+C_4\sin2x).$$

例 15　求下列微分方程的通解.

（1）$y^{(5)}+2y^{(3)}+y'=0$；

（2）$y^{(6)}-2y^{(4)}-y''+2y=0$.

解　（1）特征方程为 $r^5+2r^3+r=0$，即 $r(r^2+1)^2=0$，
特征根为 $r_1=0$，$r_2=r_3=i$，$r_4=r_5=-i$，
因此通解为

$$y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

（2）特征方程为 $r^6-2r^4-r^2+2=0$，即 $(r^2-2)(r^4-1)=0$，
特征根为 $r_1=\sqrt{2}$，$r_2=-\sqrt{2}$，$r_3=1$，$r_4=-1$，$r_5=i$，$r_6=-i$.
因此通解为

$$y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+C_3e^x+C_4e^{-x}+C_5\cos x+C_6\sin x.$$

例 16　已知一个四阶常系数齐次线性微分方程的四个线性无关的特解为

$$y_1=e^x,\ y_2=xe^x,\ y_3=\cos2x,\ y_4=3\sin2x,$$

求这个四阶微分方程及其通解.

解　由 y_1 与 y_2 可知，它们对应的特征根为二重根 $r_1=r_2=1$；
由 y_3 与 y_4 可知，它们对应的特征根为一对共轭复根 $r_{3,4}=\pm2i$.
所以特征方程为 $(r-1)^2(r^2+4)=0$，即 $r^4-2r^3+5r^2-8r+4=0$，
它所对应的微分方程为 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$，
其通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3\cos2x+C_4\sin2x$.

五、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法

形如

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{8}$$

（其中 p、q 为常数）的方程称为二阶常系数非齐次线性微分方程. 根据解结构，其通解为 $y=$

$Y+y^*$，其中 Y 为对应齐次方程的通解，y^* 为该非齐次方程的一个特解. 本节主要针对两种形式的自由项 $f(x)$，用待定系数法(代数的方法)得到 y^*. 这是因为对这两种形式的方程而言，用待定系数法得到 y^* 更为简便.

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_n(x)$ 情形

其中 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为 n 次多项式，λ 为常数.

方程(6)的自由项是多项式 $P_n(x)$ 与指数函数 $e^{\lambda x}$ 的乘积，要求 y^*，使得(6)成为恒等式. 由于多项式与指数函数的乘积的导数仍然是这种形式，因此我们推测 $y^*=e^{\lambda x}Q(x)$ 可能是方程(6)的特解，其中 $Q(x)$ 为待定系数的多项式.

由于 $y^*=e^{\lambda x}Q(x)$，$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$，

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)],$$

代入方程(6)，并消去 $e^{\lambda x}$，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_n(x), \tag{9}$$

(1) 若 λ 不是对应齐次方程的特征方程的特征根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq0$，$2\lambda+p\neq0$，那么由于 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，则 $Q(x)$ 也应是 n 次多项式($Q'(x)$、$Q''(x)$ 的最高次方皆低于 $Q(x)$ 的最高次方). 因此取 $Q(x)=Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$. 将 $Q_n(x)$ 代入(7)式，比较等式两端 x 的同次幂，就得到含有 b_0，b_1，$\cdots$，b_{n-1}，b_n 作为未知数的 $n+1$ 个方程. 解此方程组，确定 $Q_n(x)$，从而得到 $y^*=e^{\lambda x}Q_n(x)$.

(2) 若 λ 是对应齐次方程的特征方程的单特征根，即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，但 $2\lambda+p\neq0$，此时可知 $Q'(x)$ 应是 n 次多项式，故 $Q(x)$ 是 $n+1$ 次多项式. 因此取 $Q(x)=xQ_n(x)$.

(3) 若 λ 是对应齐次方程的特征方程的重特征根，即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，同时 $2\lambda+p=0$，此时可知 $Q''(x)$ 应是 n 次多项式，故 $Q(x)$ 是 $n+2$ 次多项式. 因此取 $Q(x)=x^2Q_n(x)$.

由此得到结论：$y^*=x^ke^{\lambda x}Q_n(x)$，其中 $k=0$，1，2 按 λ 不是特征根、是单特征根、是重特征根而选取，$Q_n(x)$ 为 n 次待定系数的多项式.

求解二阶常系数非齐次线性微分方程通解的步骤如下.

(1) 写出特征方程，并求出特征根；

(2) 求出对应齐次方程的通解 Y；

(3) 根据 λ 与特征根的关系确定特解形式，并代入原方程后确定其中的系数，从而得到 y^*；

(4) 写成 $y=Y+y^*$.

例 17　下列方程具有什么形式的特解？

(1) $y''+5y'+6y=e^{3x}$；　　　　(2) $y''+5y'+6y=3xe^{-2x}$；

(3) $y''+2y'+y=-(3x^2+1)e^{-x}$.

解　(1) 因 $\lambda=3$ 不是特征方程 $r^2+5r+6=0$ 的根，故方程具有特解形式：$y^*=b_0e^{3x}$；

(2) 因 $\lambda=-2$ 是特征方程 $r^2+5r+6=0$ 的单根，故方程具有特解形式：$y^*=x(b_0x+b_1)e^{-2x}$；

(3) 因 $\lambda=-1$ 是特征方程 $r^2+2r+1=0$ 的二重根，所以方程具有特解形式：

$$y^*=x^2(b_0x^2+b_1x+b_2)e^{-x}.$$

例 18　求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解　题设方程右端的自由项为 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=3x+1$，$\lambda=0$.

对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$，特征根为 $r_1=-1$，$r_2=3$.

由于 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以设特解为 $y^*=b_0x+b_1$.

把它代入题设方程，得 $-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1$，

比较系数得$\begin{cases}-3b_0=3,\\ -2b_0-3b_1=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b_0=-1,\\ b_1=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

于是，所求特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$.

例 19　求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解　题设方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，特征根为 $r_1=1$，$r_2=2$.

于是，该齐次方程的通解为 $Y=C_1x+C_2e^{2x}$.

因 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，故可设题设方程的特解为 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$.

代入题设方程，得 $2b_0x+b_1+2b_0=x$，比较等式两端同次幂的系数，得 $b_0=\dfrac{1}{2}$，$b_1=-1$.

于是，题设方程的一个特解为 $y^*=x\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)e^{2x}$.

从而，所求题设方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x\left(\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}.$$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 情形

$P_l(x)$、$P_n(x)$ 分别为 x 的 l 次、n 次多项式(可以出现其中一个多项式为零)，λ、ω 为常数. 对应的非齐次方程特解为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 均为 m 次待定系数的多项式，$m=\max(l, n)$，而 $k=0$，1 按 $\lambda\pm i\omega$ 不是特征根、是特征根而选取.

例 20　求解定解问题$\begin{cases}y''+4y=2\cos 2x,\\ y\Big|_{x=0}=0,\ y'\Big|_{x=0}=2.\end{cases}$

解　对应齐次方程的特征方程为 $r^2+4=0$，得到特征根 $r_{1,2}=\pm 2i$，故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. 取 $y^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$，代入原方程，得 $a=0$，$b=\dfrac{1}{2}$，故 $y^*=\dfrac{x}{2}\sin 2x$. 故 $y=Y+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x$. 由定解条件得 $C_1=0$，$C_2=1$，因此有特解 $y=\sin 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x$.

习题 4-3

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　(2) $y''=x+\sin x$；

（3）$y'''=xe^x$；　　（4）$y''=2x\ln x$；

（5）$(1-x^2)y''-xy'=2$；　　（6）$y''=y'+x$；

（7）$y''=1+(y')^2$；　　（8）$x^2y''+xy'=1$.

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

（1）$y''=(y')^{\frac{1}{2}}$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=1$；

（2）$(1-x^2)y''-xy'=3$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=0$；

（3）$y^3y''+1=0$，$y\big|_{x=1}=1$，$y'\big|_{x=1}=0$；

（4）$y''-ay'^2=0$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=-1$；

（5）$y''=3\sqrt{y}$，$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=2$；

（6）$yy''=2(y'^2-y')$，$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=2$.

3. 求微分方程$\begin{cases}2y''+\dfrac{1}{y^2}=0,\\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=1\end{cases}$的通解.

4. 试求 $y''=x$ 的经过点 $P(0, 1)$ 且在此点处与直线 $y=\dfrac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线方程.

5. 下列函数组在其定义域内哪些是线性无关的？

（1）e^{x^2}，xe^{x^2}；　　（2）e^{ax}，$e^{bx}(a\neq b)$.

6. 求下列微分方程的通解：

（1）$4y''+4y'+y=0$；　　（2）$y''-4y'+13y=0$；

（3）$y''-5y'=0$；　　（4）$y''-10y'-11y=0$；

（5）$y''+y'=0$；　　（6）$y''-3y'+2y=0$；

（7）$y''-6y'+9y=0$；　　（8）$y''+2y'+y=0$；

（9）$y''-4y'+5y=0$；　　（10）$y^{(4)}-2y''+y=0$；

（11）$y^{(4)}+2y''+y=0$；　　（12）$y^{(4)}+3y''-4y=0$.

7. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y''-3y'-4y=0$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=-5$；

（2）$y''+25y=0$，$y\big|_{x=0}=2$，$y'\big|_{x=0}=15$；

（3）$y''+4y'+29y=0$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=15$；

（4）$y''+y'-2y=0$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=3$；

（5）$y''+y'=0$，$y\big|_{x=0}=2$，$y'\big|_{x=0}=-1$；

（6）$y''+4y'+4y=0$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=1$；

（7）$y''-y'+y=0$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=2$；

（8）$y'''+2y''+y'=0$，$y\big|_{x=0}=2$，$y'\big|_{x=0}=0$，$y''\big|_{x=0}=-1$.

8. 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x-e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶非齐次线性微分方程的三个特解：

（1）求此方程的通解；

（2）写出此微分方程；

（3）求此微分方程满足 $y(0)=7$，$y'(0)=6$ 的特解.

9. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''+y'-2y=2e^x$；　(2) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$；

(3) $y''+2y'+y=5e^{-x}$；　(4) $y''-4y'+4y=e^{-2x}$；

(5) $y''-y'=7e^{-x}$；　(6) $y''-y=e^{2x}$；

(7) $y''-6y'+9y=e^{3x}$；　(8) $2y''+y'-y=2e^x$；

(9) $y''-y'=4\sin x$；　(10) $y''-2y'+5y=\cos 2x$.

10. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y''-3y'+2y=5$，$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=2$；

(2) $y''-y'=4xe^x$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=1$；

(3) $y''-3y'+2y=1$，$y\big|_{x=0}=2$，$y'\big|_{x=0}=2$；

(4) $y''+y+\sin 2x=0$，$y\big|_{x=\pi}=1$，$y'\big|_{x=\pi}=1$；

(5) $y''-y'=2(1-x)$，$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=1$；

(6) $y''-y=4xe^x$，$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=1$.

*第四节　微分方程的实际案例

[课前导读]

本节讲述微分方程的几个实际案例，相关专业可选学此节内容.

在这一节会用到工程上常用的双曲函数和反双曲函数.

(1) 双曲函数

$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$、$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$、$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$分别称为双曲正弦、双曲余弦、双曲正切.

(2) 反双曲函数

① $y=\mathrm{arsh}x$ 是 $x=\mathrm{sh}y$ 的反函数，反双曲正弦函数 $y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

② $y=\mathrm{arch}x$ 是 $x=\mathrm{ch}y$ 的反函数，反双曲余弦函数 $y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$；

③ $y=\mathrm{arth}x$ 是 $x=\mathrm{th}y$ 的反函数，反双曲正切函数 $y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

一、一阶微分方程的实际案例

例 1　设一物体的温度为 100 ℃，将其放置在空气温度为 20 ℃的环境中冷却. 试求物体温度 T 随时间 t 变化的规律.

解　设物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$. 在第一节的例 1 中，我们已经建立了该问题的数学模型：

$$\begin{cases}\dfrac{dT}{dt}=-k(T-20),\\ T\Big|_{t=0}=100.\end{cases}$$

其中 $k(k>0)$ 为比例常数. 下面来求上述初值问题的解. 分离变量，得$\frac{\mathrm{d}T}{T-20}=-k\mathrm{d}t$；

两边积分 $\int\frac{1}{T-20}\mathrm{d}T=\int -k\mathrm{d}t$，得 $\ln|T-20|=-kt+C_1$（其中 C_1 为任意常数），

即　$T-20=\pm e^{-kt+C_1}=\pm e^{C_1}e^{-kt}=Ce^{-kt}$（其中 $C=\pm e^{C_1}$）.

从而 $T=20+Ce^{-kt}$. 再将初始条件代入，得 $C=100-20=80$.

于是，所求规律为 $T=20+80e^{-kt}$.

注　物体冷却的数学模型在多个领域有广泛的应用. 例如，警方破案时，法医要根据尸体当时的温度推断这个人的死亡时间，就可以利用这个模型来计算解决.

例 2　设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时（$t=0$）速度为零，求降落伞下落速度与时间的关系.

解　设降落伞下落速度为 $v(t)$，降落伞下落时同时受到重力 P 与阻力 R 的作用（见图 4-3）.

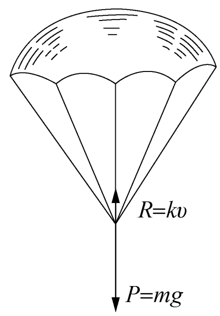


图 4-3

降落伞所受外力为 $F=mg-kv$.
根据牛顿第二定律：$F=ma$，得到 $v(t)$ 满足微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv, \tag{1}$$

初始条件为 $v|_{t=0}=0$. 将方程（1）分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\frac{\mathrm{d}t}{m},$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m},$$

$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1,$$

即 $mg-kv=e^{-k\left(\frac{t}{m}+C_1\right)}$ 或 $v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}\left(C=-\frac{e^{-kC_1}}{k}\right)$.

代入初始条件得 $C=-\frac{mg}{k}$,

故所求特解为 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

例 3　设河边点 O 的正对岸为点 A，河宽 $OA=h$，两岸为平行直线，水流速度为 a. 有一只鸭子从点 A 游向点 O，设鸭子（在静水中）的游速为 $b(b>a)$，且鸭子游动方向始终朝着点 O，求鸭子游过的迹线的方程.

解　设水流速度为 $\vec{a}(|\vec{a}|=a)$，鸭子游速为 $\vec{b}(|\vec{b}|=b)$，则鸭子实际运动速度为 $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$. 取坐标系如图 4-4 所示，设在时刻 t 鸭子位于点 $P(x,y)$，则鸭子运动速度 $v=(v_x,v_y)=(x_t,y_t)$，故有$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x_t}{y_t}=\frac{v_x}{v_y}$. 现在$\vec{a}=(a,0)$，而 $\vec{b}=b\vec{e}_{PO}$，其中$\vec{e}_{PO}$为与$\overrightarrow{PO}$同方向的单位向量.

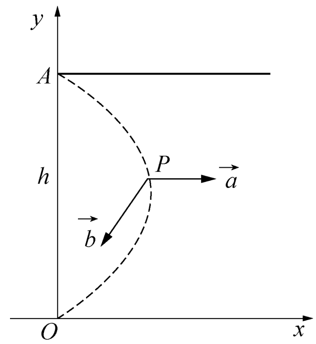


图 4-4

由于$\overrightarrow{PO}=-(x,\ y)$，故$\vec{e}_{PO}=\dfrac{-(x,\ y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

于是 $\vec{b}=-\dfrac{b}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,\ y)$，

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\left(a-\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -\frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

由此得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{v_x}{v_y}=-\frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{by}+\frac{x}{y},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{a}{b}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{x}{y},$$

初始条件为 $x\big|_{y=h}=0$. 令$\dfrac{x}{y}=u$，则 $x=yu$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+u$，代入上面的方程，得

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\frac{a}{b}\sqrt{u^2+1},$$

分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=-\frac{a}{by}\mathrm{d}y,$$

积分得

$$\ln(u+\sqrt{u^2+1})=-\frac{a}{b}(\ln y+\ln C),$$

故

$$x=\frac{y}{2}\left[(Cy)^{-\frac{a}{b}}-(Cy)^{\frac{a}{b}}\right]=\frac{1}{2C}\left[(Cy)^{1-\frac{a}{b}}-(Cy)^{1+\frac{a}{b}}\right].$$

将初始条件代入上式，得 $C=\dfrac{1}{h}$，故所求迹线方程为

$$x=\frac{h}{2}\left[\left(\frac{y}{h}\right)^{1-\frac{a}{b}}-\left(\frac{y}{h}\right)^{1+\frac{a}{b}}\right],\ 0\leqslant y\leqslant h.$$

例 4　如果设某商品在时刻 t 的售价为 P，社会对该商品的需求量和供给量分别是 P 的函数 $Q(P)$、$S(P)$. 一般情况下，商品供给量 S 是价格 P 的单调递增函数，商品需求量 Q 是价格 P 的单调递减函数. 为简单起见，设该商品的供给函数与需求函数分别为

$$S(P)=a+bP,\ Q(P)=\alpha-\beta P, \tag{2}$$

其中 a、b、α、β 均为常数，且 $b>0$，$\beta>0$.

当供给量与需求量相等时，可得供求平衡时的价格：

$$P_{\mathrm{e}}=\frac{\alpha-a}{\beta+b},$$

称 P_{e} 为均衡价格.

一般地说，当某种商品供不应求，即 $S<Q$ 时，该商品价格要涨；当供大于求，即 $S>Q$ 时，该商品价格要落. 因此，假设 t 时刻的价格 $P(t)$ 的变化率与超额需求量 $Q-S$ 成正比，于

是有方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k[Q(P)-S(P)],$$

其中 $k>0$，用来反映价格的调整速度.

将(2)代入方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\lambda(P_e-P), \tag{3}$$

其中常数 $\lambda=(b+\beta)k>0$. 方程(3)的通解为

$$P(t)=P_e+C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

假设初始价格 $P(0)=P_0$，代入上式，得 $C=P_0-P_e$. 于是上述价格调整模型的解为

$$P(t)=P_e+(P_0-P_e)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

由 $\lambda>0$ 知，$t\to+\infty$ 时，$P(t)\to P_e$. 这说明随着时间不断推延，实际价格 $P(t)$ 将逐渐趋近均衡价格 P_e.

二、二阶微分方程的实际案例

例 5　质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴做直线运动. 设力 F 仅是时间 t 的函数：$F=F(t)$. 在开始时刻 $t=0$ 时 $F(0)=F_0$，随着时间 t 的增大，此力 F 均匀地减少，直到 $t=T$ 时，$F(T)=0$. 如果开始时质点位于原点，且初速度为零，求该质点的运动规律.

解　设在时刻 t 质点的位置为 $x=x(t)$. 由牛顿第二定律，得质点运动的微分方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F(t). \tag{4}$$

由题设，$F(t)$ 随 t 增大而均匀地减少，$F(0)=F_0\Rightarrow F(t)=F_0-kt$.

又

$$F(T)=0\Rightarrow F(t)=F_0\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

于是方程(4)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{F_0}{m}\left(1-\frac{t}{T}\right). \tag{5}$$

其初始条件为

$$x\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0.$$

在方程(5)两端积分，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}\int\left(1-\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)+C_1.$$

代入初始条件 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$，得 $C_1=0$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)\Rightarrow x=\frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T}\right)+C_2.$$

将条件 $x\big|_{t=0}=0$ 代入上式，得 $C_2=0$. 于是所求质点的运动规律：

$$x=\frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T}\right),\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

例 6　墙上有两个钉子，连接着一条绳子，绳子仅受到重力作用而下垂，所成之曲线称之为悬链线，试推导此曲线方程.

解　建立坐标系 xOy（见图 4-5），设曲线方程为 $y=y(x)$，使悬链线的最低点位于 y 轴上，且 $|OA|=a$（这个 a 待定，将在下面给出说明），则点 A 的坐标为 $(0, a)$. 这样就得到了初始条件：$y|_{x=0}=a$，$y'|_{x=0}=0$（由于光滑曲线在最低点处的切线平行于 x 轴）.

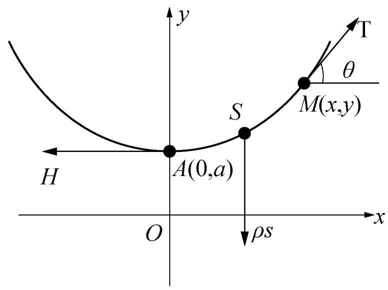


图 4-5

做受力分析：取一段弧 $\overset{\frown}{AM}$（其中点 M 的坐标为 (x, y)），设其弧长为 s，单位弧长重 ρ（密度），则弧 $\overset{\frown}{AM}$ 所受的重力为 ρs. 设在点 A 处受到水平张力 H，在点 M 处受到切向张力 T，T 与平行于 x 轴的直线的夹角为 θ，则在平衡状态下，应有

$$T\cos\theta=H,\ F_x=0 \text{ 及 } T\sin\theta=\rho s.$$

两式相除，得 $\tan\theta=\dfrac{\rho}{H}s$. 由于 ρ 是已知的，水平张力 H 可通过实验手段获得，因此 $\dfrac{\rho}{H}$ 是已知的，不妨记为 $\dfrac{\rho}{H}=\dfrac{1}{a}$（这就是 a 的出处）. 又 $\tan\theta=y'$，即得

$$y'=\frac{1}{a}s,\ y''=\frac{1}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}.$$

利用弧微分公式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2}$，得 $y''=\dfrac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$，

即得定解问题：$\begin{cases} y''=\dfrac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}, \\ y|_{x=0}=a,\ y'|_{x=0}=0. \end{cases}$

令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$.

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}x$，两边积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{a}\int\mathrm{d}x+C_1$，即

$$\operatorname{arsh}p=\frac{x}{a}+C_1\left(\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\frac{x}{a}+C_1\right).$$

由 $y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=0$，故 $\operatorname{arsh}p=\dfrac{x}{a}$，或 $p=\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$. 再积分得

$$y=\int\operatorname{sh}\frac{x}{a}\mathrm{d}x+C_2=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}+C_2.$$

由 $y|_{x=0}=a$ 得 $C_2=0$，因此得悬链线方程为

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=\frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right).$$

例 7　一个离地面很高的物体受地球引力作用，由静止开始落向地面，求它落到地面时的速度和所需时间.（不计空气阻力）

解　建立坐标系 xOy（见图 4-6），设球心与该物的连线为 y 轴，方向朝上，物体的质量

为 m，地球的质量为 M，半径为 R，物体到地心的距离为 l，在时刻 t 时物体所在位置为 $y(t)$，则速度为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 由万有引力公式得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{kMm}{y^2}.$$

其中 k 为引力系数.

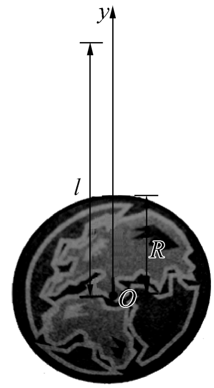


图 4-6

先确定 k：由$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right|_{y=R}=-g$，得$-g=-\frac{kMm}{R^2}$，即 $k=\frac{gR^2}{Mm}$，

故有定解问题：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{gR^2}{y^2},\\ y\big|_{t=0}=l,\ y'\big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

令 $y'=v$，则 $y''=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，原方程化为 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=-\frac{gR^2}{y^2}$，分离变量得 $v\mathrm{d}v=-\frac{gR^2}{y^2}\mathrm{d}y$，

两边积分得

$$\int v\mathrm{d}v=-\int\frac{gR^2}{y^2}\mathrm{d}y+C_1,$$

即$\frac{1}{2}v^2=\frac{gR^2}{y}+C_1$. 由 $v\big|_{y=l}=0$ 得 $C_1=-\frac{gR^2}{l}$，故

$$v^2=2gR^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{l}\right).$$

令 $y=R$，就得到落到地面的速度

$$v^2=2gR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{l}\right)，\text{或 } v=-\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{l}\right)}.$$

（负号表示运动的方向是朝 y 轴反向）

由 $v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-R\sqrt{2g\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{l}\right)}$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{-R\sqrt{2g\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{l}\right)}}=\mathrm{d}t,$$

即

$$\mathrm{d}t=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\sqrt{\frac{y}{l-y}}\mathrm{d}y.$$

两边积分（作变换 $y=l\cos^2u$）得

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right)+C_2.$$

由 $y\big|_{t=0}=l$ 得 $C_2=0$，因此

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right).$$

当 $y=R$ 时，得

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{lR-R^2}+l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}}\right).$$

例 8　一链条悬挂在钉子上，起动时一端离开钉子 8 m，另一端离开钉子 12 m，求链条全部滑过钉子所需时间.

解　链条所受力是变力，设线密度为 ρ，则它所受力是

$$F=[\rho x-(20-x)\rho]g=2\rho g(x-10).$$

由牛顿第二定律得 $20\rho\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2\rho g(x-10)$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{g}{10}(x-10).$$

若取 $g=10$，则有 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-x=-10.$　　　(6)

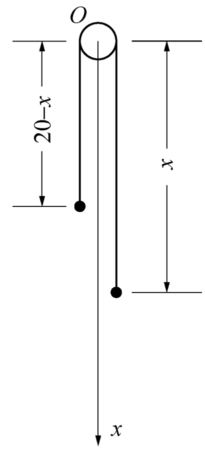


图 4-7

对应齐次方程的特征方程为 $r^2-1=0$，得到特征根 $r_{1,2}=\pm1$，故对应齐次方程的通解为 $X=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}$. 取 $x^*=a$，代入(6)式得 $a=10$，因此通解为 $x=X+x^*=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+10$.

由初始条件知 $C_1+C_2=2$，$C_1-C_2=0$，得 $C_1=C_2=1$，因此 $x=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}+10$.

当 $x=20$ 时，$20=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}+10$，即

$$\mathrm{ch}t=5,\ t=\mathrm{arch}5=\ln(5+\sqrt{5^2-1})=\ln(5+2\sqrt{6}).$$

习题 4-4

1. 质量为 1 g 的质点受外力作用做直线运动，外力与时间成正比. 在 $t=10$ s 时，速率为 50 cm/s，外力为 4 g · cm/s^2. 从运动开始经过 1 min 后的速率是多少？

2. 镭的衰变与它的现存量 R 成正比，经过 1 600 年以后，只余下原始量 R_0 的一半. 试求镭的现存量 R 与时间 t 的函数关系.

3. 将质量为 m 的物体垂直上抛，假设初始速度为 v_0，空气阻力与速度成正比（比例系数为 k），试求在物体上升过程中速度 v 与时间 t 的函数关系.

4. 在 Ox 轴上，一质量为 m 的质点受力 $A\cos\omega t$ 而运动，初始条件为 $x|_{t=0}=a$，$v|_{t=0}=0$，求该质点的运动方程.

5. 一质量为 m 的物体，在黏性液体中由静止自由下落. 假设液体阻力与运动速度成正比，试求物体的运动规律.

6. 大炮以仰角 α、初速度 v_0 发射炮弹，若不计空气阻力，求弹道曲线.

本章小结

本章小结

基本概念	了解 微分方程、阶、通解、特解、初始条件、初值问题的概念
一阶微分方程	掌握 可分离变量方程和齐次方程的解法 会求 一阶线性微分方程的解
二阶微分方程	了解 二阶微分方程解的结构 会求 可降阶的二阶微分方程的解 掌握 二阶齐次线性微分方程的解法 会求 二阶非齐次线性微分方程(两种基本类型)
微分方程应用	会用 微分方程求解一些简单的几何问题和物理问题

章节测试四

一、填空选择题

1. 方程$\frac{d^3y}{dx^3}+e^x\frac{d^2y}{dx^2}+e^{2x}=1$的通解中应包含的任意常数的个数为(　　);

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 0

2. 微分方程$y'=-y+xe^{-x}$是(　　)方程;

A. 可分离　　B. 齐次　　C. 一阶非齐次线性　　D. 一阶齐次线性

3. 已知$y=(C_1+C_2x)e^x+C_3\cos x+C_4\sin x$是某四阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该微分方程为(　　);

A. $y^{(4)}-2y'''-2y''+2y'+y=0$　　B. $y^{(4)}+2y'''-2y''+2y'+y=0$

C. $y^{(4)}-2y'''+y''-y'+y=0$　　D. $y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0$

4. 微分方程$y'-xy'=a(y^2+y')$的通解为________;

5. 方程$y''-3y'-4y=0$,满足$y|_{x=0}=0$,$y'|_{x=0}=-5$的特解是____________.

二、计算下列微分方程:

(1) 求初值问题$\begin{cases}e^x\cos y\,dx+(e^x+1)\sin y\,dy=0\\ y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}\end{cases}$的解.

(2) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$;

(3) $y\ln y\,dx+(x-\ln y)\,dy=0$.

(4) $y''+y=e^{3x}$.

(5) $y''=(y')^3+y'$.

三、卫生球直径为1cm，放置一个月后直径变为0.5cm，假定它的发挥速度正比于其表面积，求卫生球半径与时间的关系，问经过多长时间它能挥发完毕.

四、设$y=x^2$是方程$x^2y'+P(x)y=3x^3$的一个解，求该方程满足$y|_{x=1}=2$的特解.

五、若方程$y''+a^2y=0(a>0)$有满足$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=1}=0$的非零解，求a的值.

六、如果对任意$x>0$，曲线$y=y(x)$上的点$(x, y(x))$处的切线在y轴上的截距等于$\frac{1}{x}\int_0^x y(t)\,dt$，求函数$y=y(x)$的表达式.

拓展阅读

神奇的三维分形艺术

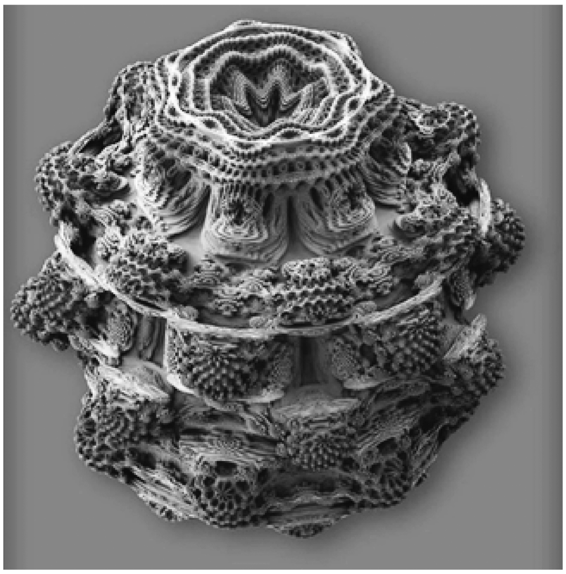
近日，一群数学“极客”利用特定的数学方程，经过反复迭代算法，创作出一组令人叹为观止的三维分形结构图案.

“极客”一词，来自于美国俚语“geek”的音译，一般理解为性格古怪的人. 数学“极客”大多是指不一定是数学专业但对数学等技术有狂热的兴趣并投入大量时间钻研的人. 所谓“分形”，本意是指“破碎、不规则”，在“分形几何”中指的是不规则复杂现象中的秩序和结构. 因此，“分形几何”就是研究无限复杂,但具有一定意义的自相似图形和结构的几何学. 所谓“分形艺术”图，就是利用数学方法，通过计算机程序进行无数次运算最终形成的分形艺术图案.

以下图中的这些三维结构尽显美丽而神奇的特点，有的像细腻的法国奶油蛋糕，有的像神话或科幻小说中的神秘洞穴. 这些图形通常也可以用来制作三维屏保.

1. 曼德尔球

极客们把图中的球状物称为“曼德尔球”(Mandelbulb). 该名称来源于分形几何的创始人曼德尔布罗特(Mandelbrot). 这个三维图是由一个原始球体经过一种迭代算法而产生的. 极客们将原始球体上各点的三维数据，运用同一方程进行无数次的重复运算，就得到了这个“曼德尔球”结构. 这一过程与二维“曼德尔布罗特”集合的形成过程相似.



曼德尔球

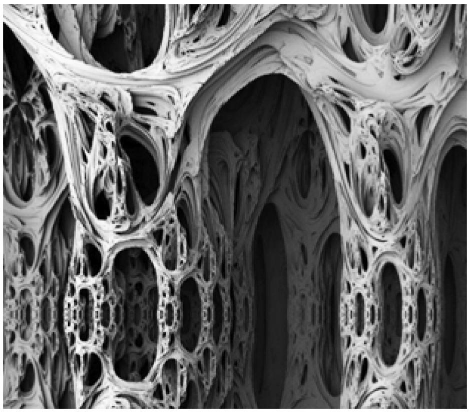
2. 曼德尔布罗特三维结构

丹尼尔·怀特是一位分形艺术爱好者，也是这组作品的创作者之一. 他认为，这组作品并不仅仅是三维“曼德尔布罗特”集合，它们比普通的三维“曼德尔布罗特”集合看起来更美丽、更迷人. 怀特指出，所有的原始方程中，只有一部分可以产生如此迷人的三维图，有些

原始方程只有在进行至少 2 次方运算之后才可以产生一些迷人的效果. 普通人从本图中根本找不出它的规律所在.

3. 8 次方运算结果

如果将原始方程进行 8 次方运算，就可能得到更细致、更美丽的图案，甚至连怀特等人都无法解释为什么会形成如图所示的美妙图案.



曼德尔布罗特三维结构



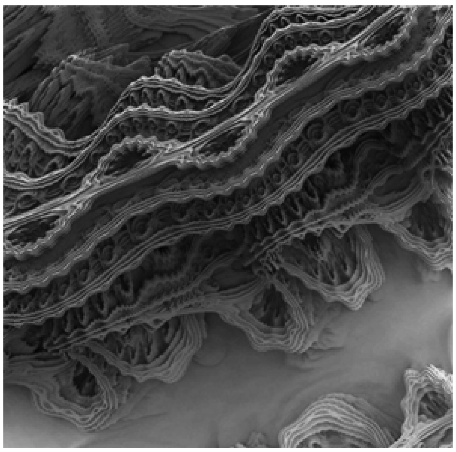
8 次方运算结果

4. 曼德尔布罗特蛋糕

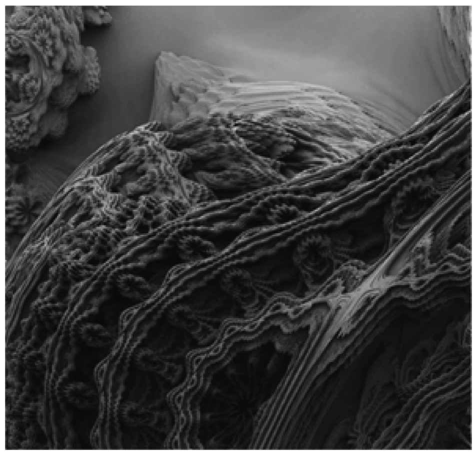
怀特等人在这些作品上花费了大量的精力. 他们将这些作品无限放大，致力于寻找更为有趣的结构. 图中这个造型很像一种法国奶油蛋糕，因此怀特把它称为“曼德尔布罗特蛋糕”.

5. 地质结构

即使是单方程，只要经过数千次的迭代运算，也可以产生一个完整的结构. 比如本图所示的结构，看起来就像人类已发现的某行星表面的地质结构.



曼德尔布罗特蛋糕



地质结构

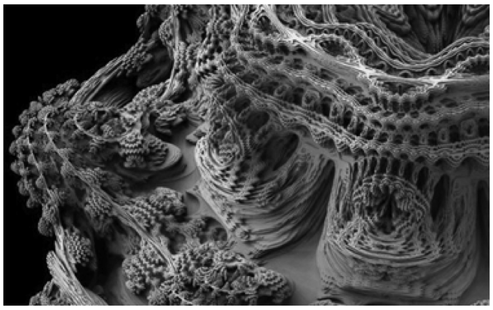
6. 巴洛克风格

许多时候，甚至连怀特等人都会惊讶于曼德尔球内部结构的复杂性. 在为本图撰写说明时，怀特这样写道：“(图中)这个世界显得非常杂乱，里面包含了许多数学秘密，因此形成了诸如此类的巴洛克风格美景. ”图中呈现出许多巴洛克风格的桥梁和柱子. “巴洛克”是

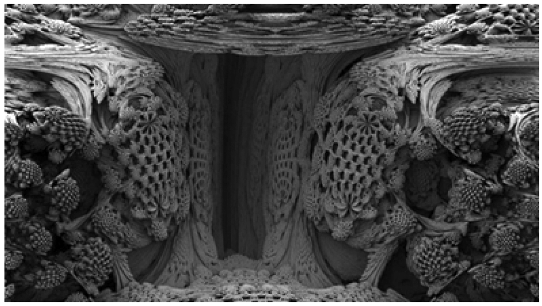
一种风格术语，指自17世纪初至18世纪上半叶流行于欧洲的主要艺术风格. 该词来源于葡萄牙语barroco，意思是一种不规则的珍珠.

7. 神秘洞穴

利用三维分形艺术，极客们不仅仅创作出如图所示的“迷失的神秘洞穴”图案，而且绘声绘色地杜撰了一个相应的短篇科幻小说。他们在小说中写道：“早在远古时代，一个距离我们几十亿光年的星球上已经出现了这个足有半英里(约800米)高的神秘洞穴。不过，这个洞穴现在已经沉入了海底. 它是由一种高智商的生命所建造的，这些生命或许早就发现了曼德尔布罗特三维结构的秘密. 洞穴的内部充满各种高科技和数学秘密，或许其中还包含许多形如曼德尔布罗特结构的真实事物.”



巴洛克风格



神秘洞穴

8. 生奶油

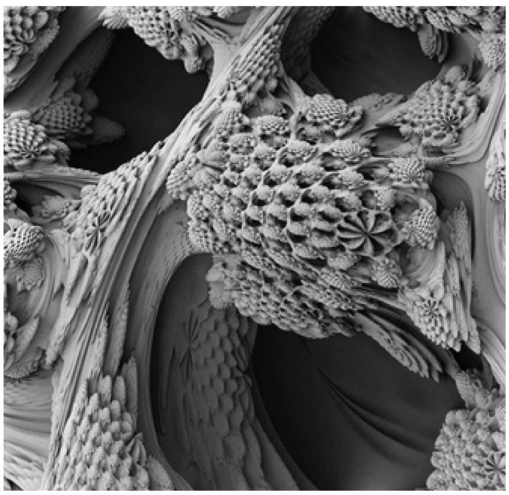
即使经过8次方运算，有些曼德尔布罗特三维结构仍然无法展现其全部的细节，即仍可对其进一步运算以获得更详细、更神奇的结果. 本图中好似“生奶油”的部分，看起来就算不上真正的曼德尔布罗特三维结构.

9. 美丽的图案

怀特和“分形论坛”的其他成员对他们所创作的三维结构非常满意. 尽管这些结构在现实中并不存在，但它们可以通过计算机软件获得. 从社会学角度讲，这种技术显得相当神奇，它可以创造出一个美丽的世界.



生奶油



美丽的图案

习题答案

第　一　章

习题 1−1

1. (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{6, 8\}$;

(2) $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}^{+}$, $\varnothing$, $\{0\}$;

(3) $\{x \mid x>3\}$, $\{x \mid 4<x<5\}$, $\{x \mid 3<x\leqslant 4\}$, $\{x \mid x\geqslant 5\}$;

(4) $\{x \mid -3<x\leqslant 3\}$, $\{x \mid -1\leqslant x<2\}$, $\{x \mid -3<x<-1\}$, $\{x \mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$.

2. $\{1, 5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 5\}$.　　3. $\{2, 4, 5, 6, 8\}$.

4. (1) $x\in(2, 6]$; (2) $x\in(-3, 3)$; (3) $x\in(1.9, 2.1)$; (4) $x\in(-\infty, -100)\cup(100, +\infty)$;

(5) $x\in(0.99, 1)\cup(1, 1.01)$; (6) $x\in[-3,2)\cup(2,7]$.

5. $\delta=0.05$; $\delta=0.005$.

6. (1) $(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$; (2) $\left[-\dfrac{2}{3}, 3\right]$; (3) $[0, 2)\cup(2, +\infty)$; (4) $[-2, 1)$;

(5) $[-2, 0)$; (6) $(-\infty, -1)\cup[0, +\infty)$; (7) $[-1, 1]$; (8) $\left[1, \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{e}\right)$.

7. $f(1)=2$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\dfrac{\pi^2}{4}$; $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $f(-3)$不存在.

8. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$; $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$不存在.

9. $f[g(x)]=0$, $x\in\{0\}$; $g[f(x)]=\sqrt{2-x^2}$, $x\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

10. $f[f(x)]=\dfrac{x-1}{x}$; $f\{f[f(x)]\}=x$.　　11. $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2+1}$.

12. $f[\varphi(t)]=\lg(1+t)[3lg(1+t)+4]$, 定义域为$\{t \mid t>-1\}$;

$\varphi[f(x)]=\lg(1+3x^2+4x)$, 定义域为$(-\infty, -1)\cup\left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

13. (1) $[0, 4]$; (2) $f(0)=0$, $f(1.2)=1$, $f(3)=1$, $f(4)=0$.

14. $f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ e^{1+x}, & -1\leqslant x<0,\\ e^{e^x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　15. $f(x)=\begin{cases}5-3x, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x<2,\\ 3x-5, & x\geqslant 2.\end{cases}$

习题 1−2

1. (1) 收敛到 0;　(2) 收敛到 1;　(3) 发散;　(4) 收敛到 1;　(5) 收敛到 0;

(6) 发散;　(7) 收敛到 0;　(8) 收敛到 1;　(9) 收敛到 1;　(10) 收敛到 0.

2. （1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{1}{2}$；（3）0；（4）$\frac{1}{3}$；（5）$\frac{1}{2}$；（6）$\frac{1}{2}$；（7）$\frac{1}{2}$；

（8）$\sqrt{2}$；（9）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（10）2.

3. $k=2\,017$.　4.（1）错；（2）错；（3）对；（4）对；（5）对.

5.（1）对；（2）错，$x_n=(-1)^n$；（3）错，$x_n=n$，$y_n=-n$；（4）对；（5）错，$x_n=0$；（6）错，$x_n=\frac{1}{n!}$.

习题 1-3

1.（1）0；（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$；（3）-1；（4）0；（5）$\frac{1}{14}$；（6）$2x$；（7）0；（8）$\frac{1}{3}$；（9）-1；（10）$\frac{1}{2}$；

（11）$\sqrt{2}$；（12）$\frac{1}{n}$；（13）$\frac{3}{2}$；（14）$\frac{1}{2}$.

2.（1）$y=3$；（2）$y=0$；（3）$y=1$；（4）无.　3. $a=\sqrt{3}$，$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.　4. $a=4$，$l=10$

5. 略.

习题 1-4

略.

习题 1-5

1.（1）$\frac{1}{2}$；（2）4；（3）$\frac{2}{3}$；（4）$\frac{1}{2}$；（5）2；（6）x；（7）$-\sin a$；（8）0；（9）$\frac{2}{3}$；（10）1；

（11）$\frac{1}{2}$；（12）$\frac{2}{\pi}$.

2.（1）e^2；（2）e^3；（3）e^{-4}；（4）$e^{-\frac{1}{2}}$；（5）e^2；（6）e^2；（7）e^3；（8）e^2；（9）e^{-1}；（10）e^2；

（11）e^{-2}；（12）$e^{\frac{2}{\pi}}$；（13）$e^{-\frac{1}{2}}$；（14）1.

3. 略.　4. 略.

习题 1-6

1.（1）无穷小；（2）无穷大；（3）无穷大；（4）无穷小；（5）无穷小；（6）无穷大.

2. （1）低阶，$\frac{1}{2}$阶；（2）等价；（3）高阶，4 阶；（4）同阶；（5）低阶，$\frac{1}{2}$阶；（6）等价；

（7）高阶，$\frac{3}{2}$阶；（8）高阶，2 阶；（9）同阶.

3. 错.

4.（1）0；（2）∞；（3）0；（4）∞；（5）0；（6）$\frac{1}{2}$；（7）$\frac{1}{2}$；（8）$-\frac{3}{2}$；（9）6；（10）1；（11）1；

（12）$\frac{1}{e}$；（13）2；（14）$\frac{1}{2}$；（15）$\frac{1}{2}$；（16）0.

5. 略.　6. 略.　7. 无界，非无穷大.　8. $y=x-1$.

习题 1-7

1. （1）B；（2）A；（3）D；（4）A；（5）C；（6）D.

2. （1）$[0, 2]$；（2）$(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$；（3）$[-3, -1)\cup(-1, 3]$；（4）$[0, 2]$.

3. （1）可去，无穷；（2）可去，可去，无穷；（3）跳跃；（4）可去；（5）可去；（6）可去，连续.

4. $a=1$.　　5. $a=1$.　　6. （1）1；（2）$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

7. 不连续，跳跃间断点.

8. $x=2$ 跳跃；$x=-2$ 无穷；$x=0$ 可去；$x=k\pi(k=\pm1, \pm2, \cdots)$无穷.

9. （1）$x=\pm1$，跳跃；（2）无.　　10. 略.　　11. 略.　　12. 略.　　13. 略.

章节测试一

一、1. 略；2. 2；3. 2，2；4. 2；5. C；6. A；7. C；8. C.

二、1. $-\frac{1}{4}$；2. 2；3. 4；4. 0；5. $-\frac{3}{4}$；6. $-\frac{1}{2}$.

三、$a=2-e^{-\frac{1}{2}}$，$b=2$.　　四、略.

五、$x=1$，第一类间断点，左、右极限分别为$\frac{1}{2}$、0；$x=2$，第二类间断点，左、右极限均为∞.

六、$e^{-\frac{2}{3}}$.　　七、略.

第　二　章

习题 2-1

1. （1）$-f'(0)$；（2）0，1；（3）$\frac{-2}{(1+x)^2}$；（4）$\frac{1}{6}$；（5）-6，0；（6）4；（7）C；（8）B.

2. （1）$5x^4$；（2）$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$；（3）$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$；（4）$-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$；（5）$-2x^{-3}$；（6）$\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}$.　　3. 2，$\frac{2}{3}$.

4. （1）连续，可导；（2）连续，可导；（3）连续，可导；（4）连续，不可导.

5. （1）$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\sqrt{2}$；（2）$\frac{3}{25}$，$\frac{17}{15}$；（3）$-\frac{1}{18}$；（4）-1，-1；（5）$-\frac{1}{6}$.

6. （1）不可导；（2）可导.

7. （1）$a^x\cdot e^x(1+\ln a)$；（2）$a^x\ln a+ax^{a-1}$；（3）$2x\cos x-x^2\sin x$；（4）$\tan x+x\sec^2x-2\sec x\tan x$；

（5）$\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$；（6）$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-\cot x)\cos x+\sqrt{x}(1+\csc^2x)\cos x-\sqrt{x}(x-\cot x)\sin x$；

（7）$\frac{1}{x}+\frac{3}{x\ln 10}$；（8）$x^2(3\ln x+1)$；（9）$xe^x(2\cos x+x\cos x-x\sin x)$；（10）$\frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}$.

8. $(2, 4)$，$y-4x+4=0$.　　9. $y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

10. $(1, 2)$或$(-1, -2)$.　　11. 略.

习题 2-2

1. （1）D；（2）A；（3）B；（4）D；（5）D；（6）B.

2. （1）$(0, 1)$；（2）2；（3）0；（4）0；（5）24.

3. （1）$2\cos 2x$；（2）$-2e^{-2x}$；（3）$8x+4$；（4）$\frac{3}{1+3x}$；（5）$\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$；（6）$\frac{3^{\sqrt{x}}\ln 3}{2\sqrt{x}}$；（7）$16x^3-8x$；

(8) $4\cos(4x+1)$；(9) $\dfrac{3x^2}{x^3+1}$；(10) $\sin 2x$；(11) $\dfrac{1}{x\ln x}$；(12) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$；

(13) $\dfrac{\sqrt{\ln x}+1}{2x\sqrt{\ln x}}$；(14) $e^{\cos x+x}(1-\sin x)$；(15) $2^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x$；(16) $3(2x-4)(x^2-4x+5)^2$.

4. (1) $20(4x+1)^4$；(2) $15e^{3x}+2x$；(3) $3^x\ln 3\cdot\cos 3^x$；(4) $2\ln 5\cdot\cos 2x\cdot 5^{\sin 2x}$；(5) $2\tan x\sec^2 x$；

(6) $-\dfrac{\csc^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$；(7) $-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$；(8) $-\dfrac{2}{1+4x^2}$；(9) $-2x\sin x^2+4\cos 2x$；(10) $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$；

(11) $2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$；(12) $\arctan\dfrac{x}{3}+\dfrac{3x}{9+x^2}$；(13) $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$；(14) $\dfrac{\cos x}{|\cos x|(1-\sin x)}$；

(15) $e^{\frac{x}{\ln x}}\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$；(16) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos\sqrt{x^2+1}$；(17) $\dfrac{-2}{x\sqrt{x}}\tan\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sec^2\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；(18) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

5. (1) $\dfrac{4x}{2x^2+1}$；(2) $18x(3x^2+1)^2\cos(3x^2+1)^3$；(3) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{\arctan\sqrt{x}}$；

(4) $n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx-n\sin^n x\sin nx$；(5) $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$；(6) $\dfrac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$；

(7) $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$；(8) $-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$；(9) $-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x+3e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$；(10) $\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$；

(11) $\dfrac{1}{\sin x}$；(12) $-e^{-x}(x^2-4x+2)$；(13) $\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$；(14) $\dfrac{-1}{x^2+1}$；

(15) $e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{x^2}$；(16) $\sin 2x\cdot\sin(x^2)+2x\sin^2 x\cos(x^2)$；

(17) $\dfrac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x\tan x+\sec^2 x)$；(18) $\dfrac{1}{\csc x-\cot x}(-\csc x\cot x+\csc^2 x)$.

6. (1) $2xe^{x^2}f'(e^{x^2})$；(2) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$；(3) $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$；(4) $f'(e^{2x}+2\ln x)\left(2e^{2x}+\dfrac{2}{x}\right)$.

7. (1) $\dfrac{1}{x}$；(2) $-\cos x+2\sec^2 x\tan x$；(3) $4e^{1-2x}$；(4) $\dfrac{-6x-3x^4}{(1-x^3)^2}$；(5) $2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$；

(6) $\dfrac{2x^2\cdot\sec^2 x\tan x-2x\sec^2 x+2\tan x}{x^3}$；(7) $-\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$；(8) $\dfrac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$；

(9) $-2\cos 2x\cdot\ln x-\dfrac{2\sin 2x}{x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}$；(10) $\dfrac{x}{\sqrt{(2+x^2)^3}}$.

8. (1) $-2e^x(\sin x+\cos x)$；(2) $2^n\sin\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$；(3) $\dfrac{4}{(1+x)^3}$；(4) $2^x(\ln 2)^n$.

9. $-6\left[\left(\dfrac{3}{3x+1}\right)^4+\dfrac{1}{(x-1)^4}\right]$.

10. (1) $y'=\dfrac{y-2x}{2y-x}$；(2) $y'=\dfrac{y(1+\ln y)}{y-x}$；(3) $y'=\dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$；(4) $y'=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$；(5) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$；

(6) $y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$；(7) $y'=\dfrac{ye^x}{1-e^x}$；(8) $y'=\dfrac{1}{x(\ln y+1)}$；(9) $y'=-\dfrac{x^{y-1}y+y^x\ln y}{x^y\ln x+xy^{x-1}}$.

11. 1.　　12. −1　　13.（1）$y''=\frac{y(1-2y^2)}{(1+2y^2)^3}$；（2）$y''=\frac{y-x}{(x-y+1)^3}$；

14.（1）$(\ln x+1)x^x$；（2）$\frac{\ln\cos y-y\cot x}{\ln\sin x+x\tan y}$；（3）$\frac{\sqrt{x+1}(2-x)^3}{(x-1)^4}\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{2-x}-\frac{4}{x-1}\right]$；

（4）$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{1-\sin x}}}\left[\frac{3}{4x}-\frac{\cos x}{8(1-\sin x)}\right]$.

15. $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

16.（1）$\frac{1}{t^3}$，$-\frac{3}{4t^7}$；（2）$\frac{\sin t}{1-\cos t}$，$\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$；（3）−1，0；（4）t，$\frac{1}{a}$.

17. $3x-y-7=0$.　　18. $\sqrt{2}x+2y-2\sqrt{2}=0$，$2\sqrt{2}x-2y-\sqrt{2}=0$.　　19. 2.

*20. $\left(\frac{5}{\pi}\right)$°/s.　　*21. 0.104 m.　　*22. 0.64 cm/min.　　*23. 144π m^2/s.

习题 2−3

1.（1）B，A，C；（2）D；（3）$e^{f(x)}\cdot f'(x)dx$；（4）$dy=-2x\cdot f'(-x^2)dx$；（5）$\frac{2}{\sqrt{x}}$；（6）$-\frac{1}{2}$.

2.（A）$dy>0$，$\Delta y>0$，$\Delta y-dy>0$；（B）$dy>0$，$\Delta y>0$，$\Delta y-dy<0$；

（C）$dy<0$，$\Delta y<0$，$\Delta y-dy<0$；（D）$dy<0$，$\Delta y>0$，$\Delta y-dy>0$.

3. 0.31；0.3；0.030 1；0.03.　　4. 4.

5.（1）$(\ln x+1-2x)dx$；（2）$\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}dx$；（3）$\left[\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}\right]dx$；（4）$\csc x dx$；（5）$\frac{e^y}{1-xe^y}dx$；

（6）$\frac{3\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}dx$；（7）$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$；（8）$\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}dx$；（9）$8x\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)dx$；

（10）$\frac{3^{\ln(\tan x)}\cdot 2\ln 3}{\sin 2x}dx$；（11）$5x^{5x}(1+\ln x)dx$；（12）$\frac{y(x-y)}{x(x+y)}dx$；（13）$\frac{4x^3y}{1+2y^2}dx$；（14）$-\frac{1+y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}dx$.

6.（1）$2x+C$；（2）$\frac{3}{2}x^2+C$；（3）$\frac{1}{2}\sin 2x+C$；（4）$-2\cos\frac{x}{2}+C$；（5）$-\ln(1-x)+C$；

（6）$-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$；（7）$2\sqrt{x}+C$；（8）$2\arctan\sqrt{x}+C$；（9）$\frac{1}{2}\sin^2 x+C$；（10）$\frac{1}{\cos x}+C$.

7. 同阶.　8. 略.

9.（1）2.745；（2）−0.874 8；（3）1.007；（4）1.041 4；（5）30°48″；（6）1.013 09.

10. $2\pi R_0 d$.　　11. 565.5 cm^3.　　12. −43.63 cm^2；104.72 cm^2.　　13. 0.335 5 g.

习题 2−4

1. 略.　　2.（1）$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$；（2）$\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$；（3）$-\frac{1}{3}$.　　3.（1）$\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$；（2）$\frac{\pi}{4}$.

4. 3；(1，2)，(2，3)，(3，4).　　5. 略.　6. 略.　7. 略.　8. 略.　9. 略.

10.（1）5；（2）−1；（3）2；（4）1；（5）$-\frac{1}{8}$；（6）$-\frac{1}{2}$；（7）$\frac{5}{2}$；（8）$\frac{16}{13}$；（9）2；（10）$\frac{1}{6}$；

（11）$\frac{3}{2}$；（12）1；（13）1；（14）1；（15）0；（16）$\frac{1}{2}$；（17）$\frac{1}{2}$；（18）$\frac{1}{2}$；（19）0；（20）$e^{-\frac{2}{\pi}}$；

（21）∞；（22）0；（23）$\frac{2}{3}$；（24）1；（25）1；（26）e^{-1}；（27）$e^{-\frac{1}{3}}$；（28）$e^{-\frac{\pi}{2}}$.

习题 2−5

1.（1）$1+(x-1)+13(x-1)^2+20(x-1)^3+15(x-1)^4+6(x-1)^5+(x-1)^6$；

（2）$3-3(x+1)+13(x+1)^2-20(x+1)^3+15(x+1)^4-6(x+1)^5+(x+1)^6$.

2. $-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$.

3.（1）$\frac{1}{6}$；（2）$\frac{1}{3}$；（3）$\frac{1}{120}$.　　4. $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.　　5. 1.645 8.　　6. 略.

习题 2−6

1.（1）单调减区间为$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$，单调增区间为$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$；

（2）单调减区间为$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$，单调增区间为$(-1, 1)$；

（3）单调减区间为$(0, 2]$，单调增区间为$[2, +\infty)$.

（4）单调减区间为$\left(0, \frac{1}{2}\right)$，单调增区间为$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$；

（5）单调减区间为$[100, +\infty)$，单调增区间为$(-\infty, 100)$；

（6）单调增区间为$(-\infty, +\infty)$；

（7）单调增区间为$(-\infty, +\infty)$；

（8）单调减区间为$(-\infty, -1)\cup(0, 1]$，单调增区间为$[-1, 0)\cup(1, +\infty)$.

2. 略.

3.（1）极大值为 $y(-1)=17$，极小值为 $y(3)=-47$；

（2）极小值为 $y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$；

（3）极大值为 $y(1)=2$；

（4）极大值为 $y(\pm1)=\frac{1}{e}$，极小值 $y(0)=0$；

（5）极大值为 $y(-1)=-2$，极小值 $y(1)=2$；

（6）无极值；

（7）极大值为 $y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$；

（8）极小值为 $y(1)=2-4\ln 2$.

4. $a=\frac{1}{e}$时有唯一根；$0<a<\frac{1}{e}$时有两个根；$a>\frac{1}{e}$时无实根.

5. 略.　　6. $a=2$；极大值 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

7.（1）$(-\infty, 0)\cup(1, 2)\cup(2, +\infty)\uparrow$，$(0, 1)\downarrow$.

(2) 凹区间为$\left(\frac{1}{2},2\right)$，$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$；拐点为$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

(3) 0；$f(0)=\frac{5}{4}$.

(4) $y=0$，$x=2$，$y=x+2$.

8. (1) 凸；(2) 凹.

9. (1) 凸区间为$\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$；凹区间为$\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$；拐点为$\left(\frac{5}{3},\frac{20}{27}\right)$.

(2)拐点为$(-1,\ln 2)$和$(1,\ln 2)$；曲线在$(-\infty,-1]$上凸，在$[-1,1]$上凹，在$[1,+\infty)$上凸.

10. 拐点为$\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$；凸区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$；凹区间为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

11. 拐点为$(1,-7)$；凸区间为$(0,1)$；凹区间为$(1,+\infty)$.

12. $a=1$，$b=-3$，$c=-24$，$d=16$.　　13. $(1,\pm 4)$.

14. (1) 水平渐近线为$y=0$，铅直渐近线为$x=5$，$x=-1$；

(2) 水平渐近线为$y=0$，铅直渐近线为$x=-2$；

(3) 没有水平渐近线，铅直渐近线为$x=0$；

(4) 水平渐近线为$y=-1$，没有铅直渐近线；

(5) 水平渐近线为$y=1$，没有铅直渐近线；

(6) 水平渐近线为$y=0$，铅直渐近线为$x=1$，$x=-1$.

15. 略.　　*16. 略.

习题 2-7

1. (1) 最大值为$y(\pm 2)=13$，最小值为$y(\pm 1)=4$；

(2)最大值为$y(5)=5$，最小值为$y(0)=y(10)=0$；

(3)最大值为$y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$，最小值为$y(-5)=-5+\sqrt{6}$；

(4)最大值为$y\left(-\frac{1}{2}\right)=y(1)=\frac{1}{2}$，最小值为$y(0)=0$.

2. 最大值为$\frac{\pi}{2}$，最小值为$-\frac{\pi}{2}$.　　3. $BD=15$ km.　　4. $\sqrt{2}a$，$\sqrt{2}b$.　　5. 6，3，4.

6. 存砖够用.　　7. (2，3).　　8. 一直角边为$\frac{a}{3}$，一斜边为$\frac{2a}{3}$.　　9. $\theta=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

10. $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$，$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$，$C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$，$D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$.

11. $r=\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$，$h=2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$.　　12. 5×10^5.　　13. 250.　　14. $ds=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$.

15. $ds=\sqrt{2+4x+4x^2}\,dx$；$\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　16. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.　　17. 0；$\frac{12}{21\,025}\sqrt{145}$.　　18. $\left(-\frac{\ln 2}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；$\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

19. $t=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$.　　20. $\frac{b}{a^2}$；$\frac{a^2}{b}$.　　21. 2.

22. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 23. $t=\pi$; $K=\frac{1}{4a}$; $\rho=4a$.

24. $a=\pm\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=1$.

25. $g(x)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+f'(0)x$.

26. 45 400 N. 27. 641. 4 千克力.

章节测试二

一、1. B; 2. $-2f'(1)$; 3. $\sin^2x+x\sin 2x$, $\frac{2+\pi}{4}$.

4. $f'(\sin x)\cos x$, $f''(\sin x)\cos^2x-\sin x\cdot f'(\sin x)$. 5. $-\frac{\sin x(1+x^2)+2x\cos x}{(1+x^2)^2}$.

6. $f(x)$在$[a, b]$上连续, 在(a, b)内可导, 则存在$\xi\in(a, b)$, 使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. $3^n e^{3x}$.

二、1. $a=-4$; $b=0$. 2. $y'=\frac{1}{(x+y)\cos y-1}$.

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{3t(1+t^2)}{2}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3(1+t^2)(1+3t^2)}{4t}$. 4. $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

三、(1) 单调增加区间为$(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$, 单调减少区间为$(1, 3)$;

(2) 凸区间为$(-\infty, 0)$, 凹区间为$(0, 1)\cup(1, +\infty)$; (3) $(0, 0)$.

四、略.

五、$S(x)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

六、略.

第 三 章

习题 3-1

1. D.

2. (1) $\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+(\ln 3)x+C$; (2) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$; (3) $x+\ln|x|+C$; (4) $-\frac{2}{x}+3\arctan x+C$;

(5) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{\ln 2}2^x+2\ln|x|+C$; (6) $a^{\frac{2}{3}}x+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$; (7) $\frac{1}{2}x^4+\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$;

(8) $-2x^{-\frac{1}{2}}-\ln|x|+e^x+C$; (9) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C$; (10) $x-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$; (11) $x-\arctan x+C$;

(12) $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; (13) $-\frac{1}{x}+\arctan x+C$; (14) $x^3+\arctan x+C$; (15) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$;

(16) $e^x-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$; (17) $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+C$; (18) $2x-\frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+C$; (19) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$;

(20) $3\arctan x-2\arcsin x+C$; (21) $\cos x-\sin x+C$; (22) $\frac{\tan x+x}{2}+C$; (23) $x-\cos x+C$; (24) $\tan x-\cot x+C$;

(25) $e^{x+2}+C$; (26) $\frac{9^x e^x}{1+2\ln 3}+C$.

3. $y=x^4-x+3$.   4. $y=\ln x+\frac{1}{x}-1$.   5. $y=\ln x+1$.   6. $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+1$.

7. $F(x)=-\frac{1}{4}(\tan x+\cot x)-\frac{1}{2}$.

习题 3-2

1. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{5}$; (3) $\frac{1}{3x}$; (4) $\frac{1}{6}$; (5) $-\frac{1}{4}$; (6) $\frac{1}{20}$;

(7) $\frac{1}{2}$; (8) -3; (9) $-\frac{4}{3}$; (10) $\frac{1}{3}$; (11) $-\frac{1}{5}$; (12) $\frac{1}{3}$.

2. (1) $-\frac{\cos 3x}{3}+C$; (2) $\frac{\sin 5x}{5}+C$; (3) $-\frac{e^{2-3x}}{3}+C$; (4) $\ln|1+x|+C$; (5) $-\frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$;

(6) $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+C$; (7) $-\frac{(1-3x)^{10}}{30}+C$; (8) $\frac{1}{1-x}+C$; (9) $\frac{e^{x^2}}{2}+C$; (10) $-\frac{\cos x^3}{3}+C$;

(11) $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|+C$; (12) $-\sqrt{1-x^2}+C$; (13) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$; (14) $\ln|\ln x|+C$;

(15) $-\cos(\ln x)+C$; (16) $\sin(\ln x)+C$; (17) $e^{\sin x}+C$; (18) $-e^{\frac{1}{x}}+C$; (19) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$;

(20) $\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{8}+C$; (21) $\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right)+C$; (22) $-\ln|5-x|+C$; (23) $\frac{1}{2}\arctan^2 x+C$;

(24) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+C$; (25) $e^{\arctan x}+C$; (26) $\ln|\arcsin x|+C$; (27) $\arctan(1+x)+C$;

(28) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+C$; (29) $\frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$; (30) $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}+C$;

(31) $2x-\frac{4}{3}\ln|2+3x|+C$; (32) $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$; (33) $-\cos e^x+C$; (34) $\frac{2}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{2}}+C$;

(35) $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$; (36) $\arctan e^x+C$; (37) $2\ln(1+\sqrt{x})+C$; (38) $2\arctan\sqrt{x}+C$;

(39) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$; (40) $-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$; (41) $-\sin\frac{1}{x}+C$; (42) $-e^{\frac{1}{x}}+C$;

(43) $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 8x}{16}+C$; (44) $-\frac{\cos 7x}{14}+\frac{\cos x}{2}+C$; (45) $\frac{(5x-1)^{17}}{425}+\frac{(5x-1)^{16}}{400}+C$;

(46) $-\frac{1}{5(3-x)^5}+\frac{1}{2(3-x)^6}+C$; (47) $\frac{2}{5}(\sqrt{x-3})^5+2(\sqrt{x-3})^3+C$; (48) $2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C$;

(49) $-\frac{3(\sqrt[3]{2-x})^8}{8}+\frac{12(\sqrt[3]{2-x})^5}{5}-6(\sqrt[3]{2-x})^2+C$; (50) $-\sqrt{2x+1}-\ln|1-\sqrt{2x+1}|+C$;

(51) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$; (52) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C$; (53) $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$;

(54) $-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C.$

3. (1) $-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}+C$；(2) $\frac{1}{2}\ln|x^2+3x+4|+\frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$；(3) $e^{x+\frac{1}{x}}+C$；

(4) $\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C$；(5) $-\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$；(6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C$；

(7) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C$；(8) $\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C$；(9) $x-2\sqrt{x+2}+2\ln(1+\sqrt{x+2})+C$；

(10) $\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x+2}{3}+\frac{x+2}{3}\sqrt{\frac{5-4x-x^2}{3}}\right)+C.$

4. (1) $\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$；(2) $-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$；(3) $-xe^{-x}-e^{-x}+C$；(4) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)+C$；

(5) $-x\cos x+\sin x+C$；(6) $-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$；(7) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$；(8) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}+C$；

(9) $\ln|\sin x|-x\cot x+C$；(10) $\frac{(x-1)5^x}{\ln 5}-\frac{5^x}{\ln^2 5}+C$；(11) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$；

(12) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+C$；(13) $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$；

(14) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$；(15) $\frac{-\sin x\cdot e^{-x}-\cos x\cdot e^{-x}+C}{2}$；

(16) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$；(17) $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$；

(18) $\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$；(19) $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C$；(20) $\frac{-e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)}{5}+C$；

(21) $x\ln(1+\sqrt[3]{x})-\sqrt[3]{x}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}-\frac{x}{3}+\ln(1+\sqrt[3]{x})+C$；(22) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C.$

5. $-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C.$　　6. $-\frac{x^2e^x}{x+2}+xe^x-e^x+C.$

习题 3-3

1. (1) $\frac{1}{3}(\ln|x-3|-\ln|x|)+C$；(2) $\frac{1}{4}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)+C$；

(3) $\ln|x^2+2x-15|+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+5}{x-3}\right|+C$；(4) $\frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C$；

(5) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2}\right]+C$；(6) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$；

(7) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$；(8) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$；

(9) $-\ln|x+2|+\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C$；(10) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3}+C$；

(11) $x+5\ln|x-2|-\frac{6}{x-2}+C$；(12) $x-\frac{3}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$

2. （1）$\frac{1}{4}\left(\ln\left|2+\tan\frac{x}{2}\right|-\ln\left|2-\tan\frac{x}{2}\right|\right)+C$；（2）$\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x+C$；

（3）$\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$；（4）$\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}+C$；（5）$\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C$；

（6）$\frac{1}{20}\sin10x+\frac{1}{4}\sin2x+C$；（7）$\tan x-\sec x+C$；（8）$\tan\frac{x}{2}+\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C$；

（9）$-\frac{1}{2}\arctan(2\cos x)+C$；（10）$\frac{1}{2}\ln|\csc2x-\cot2x|+\frac{1}{2}\tan x+C$.

3. （1）$\ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)-\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|-2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C$；（2）$2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$；（3）$\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$；

（4）$\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$；（5）$-\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{3}}+C$；

（6）$2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C$；（7）$\arcsin\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+C$.

习题 3-4

*1. （1）28；（2）$\frac{1}{4}$.　　*2. $\frac{\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x}{\pi}$.　　3. （1）$\frac{\pi a^2}{4}$；（2）0.

4. （1）$\int_0^1(x^2+1)\mathrm{d}x$；（2）$\int_1^e\ln x\,\mathrm{d}x$；（3）$\int_0^2x\,\mathrm{d}x-\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x$；（4）$\int_0^1 2\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^4(\sqrt{x}-x+2)\mathrm{d}x$.

5. （1）>；（2）<；（3）>；（4）<；（5）<；（6）>；（7）>；（8）<.

6. （1）$\frac{1}{2}\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant1$；（2）$\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^4x)\mathrm{d}x\leqslant\pi$.

7. 略.　　8. 0.　　*9. 略.

习题 3-5

1. 均存在，$\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x)$，$\left[\int_x^b f(u)\mathrm{d}u\right]'=-f(x)$.

2. （1）e^{x^2-x}；（2）$\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$；（3）$-2\frac{\sin x^2}{x}$；（4）$2x\sqrt{1+x^6}-2\sqrt{1+8x^3}$；

（5）$\frac{\ln(1+x^2)}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\ln(1+x^3)}{2\sqrt{x}}$；（6）$-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2x)-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2x)$.

3. $-\frac{1}{4}$.　　4. $\frac{\pi}{2}$.　　5. $\cot t^2$.　　6. $-\cos(x^2)\cdot e^{y^2}$.　　7. 0.

8. （1）$\frac{1}{3}$；（2）e；（3）2；（4）1；（5）$\frac{\pi^2}{4}$；（6）1；（7）12；（8）2.

9. （1）$\sqrt{\frac{2}{g}}$；（2）$\frac{1}{2}$；（3）$\frac{\pi}{6}$；（4）$1-\frac{\pi}{4}$；（5）$\frac{\pi}{3}$；（6）$\frac{40}{3}$；

（7）$1-\frac{\pi}{4}$；（8）$1+\frac{\pi}{4}$；（9）1；（10）4；（11）5；（12）$3-e^{-3}$.

10. $1+\frac{3}{8}\pi^2$.　　11.（1）$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}$；（2）$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

12. $f(x)=\pm5x$.　　13. 略.

习题 3-6

1.（1）$\frac{11}{12}$；（2）$\frac{\pi}{3}$；（3）$\frac{1}{4}$；（4）$\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$；（5）$\frac{\pi}{4}$；（6）$\frac{1}{4}$；（7）2；（8）$2\sqrt{2}$；

（9）$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$；（10）1；（11）$1-\frac{\pi}{4}$；（12）$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$；（13）$\pi-\frac{4}{3}$；（14）2e；（15）$\frac{\pi}{6}$；

（16）$\sqrt{3}-2$；（17）$\ln2-\ln(1+e^{-1})$；（18）1；（19）$\arctan e^{\frac{\pi}{2}}-\arctan e^{-\frac{\pi}{2}}$；（20）$2(\sqrt{3}-1)$.

2.（1）$4-2\arctan2$；（2）$4-2\ln3$；（3）$\frac{\pi}{32}$；（4）$\frac{\pi}{6}$；（5）$\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$；

（6）$\frac{\pi}{16}$；（7）$-\frac{\pi}{3}$；（8）$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$；（9）$\frac{\sqrt{2}}{2}$；（10）$4\arcsin\frac{1}{4}$.

3.（1）1；（2）$\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}$；（3）$1-2e^{-1}$；（4）$-\frac{1}{4}\ln(1+\pi^2)$；（5）$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$；（6）$\frac{2}{5}(e^{4\pi}-1)$；

（7）$\frac{\pi^2}{4}-2$；（8）$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln2$；（9）$4\sin1$；（10）$\frac{1}{64}$；（11）$\frac{1}{2}(e\sin1-e\cos1+1)$；（12）$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$；

（13）$J_m=\begin{cases}\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2}, & m=2k,\ k\in\mathbf{Z}^+\\ \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi, & m=2k-1.\end{cases}$

4.（1）$\frac{3}{2}$；（2）$\frac{20}{3}$；（3）$\frac{143}{6}$；（4）$\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$；（5）$(2+\sqrt{2})n$；（6）$\frac{\pi^2}{4}$.

5. 2.　　6. ln2.　　7. $3x-3\sqrt{1-x^2}$ 或 $3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$.

8. 最大值为 e^2，最小值为 0.　　9. $\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$.　　10. $\frac{1}{2}(\cos1-1)$.　　11. 略.

习题 3-7

1.（1）$\frac{1}{3}$；（2）$\frac{9}{2}$；（3）$\frac{9}{2}$；（4）$\frac{9}{2}$；（5）18；（6）$e+e^{-1}-2$；（7）$\frac{253}{12}$；

（8）2；（9）$\frac{3}{2}-\ln2$；（10）$2-\frac{2}{e}$.

2. $\frac{9}{4}$.　　3.（1）$3a^2\pi$；（2）$\frac{3}{8}\pi a^2$；*（3）$\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$；*（4）$\frac{\pi}{3}+2-\sqrt{3}$.

4.（1）$V_x=\frac{15}{2}\pi$，$V_y=\frac{124}{5}\pi$；（2）$\frac{1-e^{-2}}{2}\pi$；（3）$\frac{\pi(\pi-2)}{4}$；（4）$V_x=\frac{3}{10}\pi$，$V_y=\frac{3}{10}\pi$；

（5）$\frac{8}{3}\pi$；（6）①$x+y-6=0$，②$V_y=\frac{992}{15}\pi$；（7）$\frac{\pi}{2}$.

5. $\frac{16}{3}R^3$.　　6.（1）2；（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（3）$\frac{\pi}{2}$.

7. (1) $2\pi^2 a$; (2) $\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}$; (3) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$; (4) $\ln(1+\sqrt{2})$;

(5) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; (6) $\ln(1+\sqrt{2})$; (7) $\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})]$; (8) $\frac{3}{2}\pi a$.

8. $\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a, \frac{3}{2}a\right)$. *9. 13.68(kJ). *10. 3 462(kJ). *11. 3 000.

*12. $\frac{5\ 024}{3}$(kJ). *13. 117.6 kN. *14. 22.05 kN.

习题 3-8

1. (1) 1; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{\ln 6}{5}$; (4) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; (5) 发散; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$; (8) 发散.

2. (1) 发散; (2) 发散; (3) π; (4) $\frac{\pi}{2}$; (5) ∞; (6) $1-\frac{\pi}{9}$; (7) 发散; (8) π.

3. 当 $k\leqslant 1$ 时, I 发散; 当 $k>1$ 时, I 收敛; 当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$时, I 取得最小值.

章节测试三

一、1. A; 2. B; 3. A; 4. C; 5. B; 6. B; 7. β, α, γ 8. $\int_a^b\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$.

二、1. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 2. $x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})+C$; 3. $\arctan e^x+C$; 4. $\frac{1}{3}(e-e^{-1})$;

5. $2(\sqrt{2}-1)$; 6. $2-\frac{2}{e}$.

三、$-\frac{1}{2}$. 四、$\frac{\pi}{2}+2\arctan\sqrt{x}$. 五、$\frac{1}{3}$; $V_x=\frac{\pi}{6}$; $V_y=\frac{8}{15}\pi$. 六、$\frac{\pi}{4}$.

*七、1. 764×10^7 N.

第 四 章

习题 4-1

1. (1) B (2) A (3) D (4) D (5) B

2. (1) 二阶; (2) 一阶; (3) 不是; (4) 一阶; (5) 三阶; (6) 一阶.

3. 特解为 $x=A\cos kt$. 4. (1) $C_1=1$, $C_2=3$; (2) $C_1=0$, $C_2=1$.

5. (1) $y=e^{-x}$或 $y=e^{-2x}$; (2) $y=x^{-4}$或 $y=x^{-1}$.

6. (1) $y'=x^2$; (2) $yy'=-2x$; (3) $\begin{cases} y+xy'=0, \\ y\big|_{x=3}=1. \end{cases}$

7. $y=x^3+1$.

习题 4-2

1. (1) $y=Cx$; (2) $xy=C$; (3) $\ln(e^y-1)-y=\ln x+C$; (4) $\frac{y}{1+y}=\frac{Cx}{1+x}$; (5) $e^{-y}=-e^x-C$;

(6) $\ln^2 x+\ln^2 y=C$; (7) $\ln y+\tan x=C$; (8) $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

2. (1) $\frac{y}{x}=\ln y+C$；(2) $(y-x)^2=Cy(y-2x)^3$；(3) $y=C\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$；(4) $\sin\frac{y}{x}=\ln x+C$.

3. (1) $y=x\left(\ln\frac{x}{x+1}+C\right)$；(2) $y=e^{-x^2}(x^2+C)$；(3) $y=Ce^{-x}+e^{-x}x$；(4) $y=Ce^{-x^2}+2$；

(5) $y=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$；(6) $y=\frac{C}{x^2+1}+\frac{4x^3}{3(x^2+1)}$；(7) $y=\frac{Ce^x}{x}+\frac{e^{2x}}{x}$；(8) $x=Cy^3+\frac{y^2}{2}$.

4. (1) $y=e^{\tan\frac{x}{2}}$；(2) $y=1-\sqrt{1-x^2}$；(3) $y=4\cos x-3$；(4) $e^x+1=\frac{4}{\sqrt{2}}\cos y$；(5) $y=\ln\frac{1+e^{2x}}{2}$；

(6) $y=3-\frac{3}{x}$；(7) $\left(\frac{y}{x}\right)^2=2\ln x+1$；(8) $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$；(9) $y=\frac{x}{\cos x}$；(10) $y=-\frac{\cos x}{x}$；

(11) $y=\frac{\sqrt{x}}{5}-\frac{x^3}{5}$；(12) $y=x^2(1-e^{\frac{1}{x}-1})$；(13) $y=\tan x-1+e^{-\tan x}$；(14) $y=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+1)$.

5. $y=\frac{6}{x}$.　　6. $y=2e^x-2x-2$.　　7. 是.　　*8. $4y+\sin(4y+2x)-2x=C$.

*9. $\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=2\cos\frac{x}{2}+C$.

习题 4-3

1. (1) $y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$；(2) $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$；(3) $y=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$；

(4) $y=\frac{x^2}{3}\ln x-\frac{5x^3}{18}+C_1x+C_2$；(5) $y=(\arcsin x)^2+C_1\arcsin x+C_2$；(6) $y=C_1e^x+C_2-\frac{x^2}{2}-x$；

(7) $y=-\ln[\cos(x+C_1)]+C_2$；(8) $y=\frac{1}{2}\ln^2x+C_1\ln x+C_2$.

2. (1) $y=\frac{(x+2)^3}{12}-\frac{2}{3}$；(2) $y=\frac{3}{2}\arcsin^2x$；(3) $y=\sqrt{2x-x^2}$；(4) $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$；

(5) $y=\frac{(x+2)^4}{16}$；(6) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $x=\frac{2}{3}(y^{\frac{3}{2}}-1)$.　　4. $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$.　　5. (1) 线性无关；(2) 线性无关.

6. (1) $y=(C_1+xC_2)e^{-\frac{x}{2}}$；(2) $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$；(3) $y=C_1+C_2e^{5x}$；(4) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{11x}$；

(5) $y=C_1+C_2e^{-x}$；(6) $y=C_1e^{2x}+C_2e^x$；(7) $y=(C_1+xC_2)e^{3x}$；(8) $y=(C_1+xC_2)e^{-x}$；

(9) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$；(10) $y=e^x(C_1+xC_2)+e^{-x}(C_3+xC_4)$；

(11) $y=\cos x(C_1+xC_2)+\sin x(C_3+xC_4)$；(12) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

7. (1) $y=e^{-x}-e^{4x}$；(2) $y=2\cos 5x+3\sin 5x$；(3) $y=3e^{-2x}\sin 5x$；(4) $y=-e^{-2x}+e^x$；

(5) $y=1+e^{-x}$；(6) $y=xe^{-2x}$；(7) $y=\frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$；(8) $y=1+e^{-x}+xe^{-x}$.

8. (1) $y=xe^x+C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$；(2) $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$；(3) $y=4e^{2x}+3e^{-x}+xe^x$.

9. (1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{2}{3}xe^x$；(2) $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$；(3) $y=(C_1+xC_2)e^{-x}+\frac{5}{2}x^2e^{-x}$；

(4) $y=(C_1+xC_2)e^{2x}+\frac{e^{-2x}}{16}$; (5) $y=C_1+C_2e^x+\frac{7e^{-x}}{2}$; (6) $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{e^{2x}}{3}$;

(7) $y=(C_1+xC_2)e^{3x}+\frac{x^2e^{3x}}{2}$; (8) $y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}+e^x$;

(9) $y=C_1+C_2e^x+2\cos x-2\sin x$; (10) $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{17}\cos 2x-\frac{4}{17}\sin 2x$.

10. (1) $y=-5e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}$; (2) $y=5e^x-5+x(2x-4)e^x$; (3) $y=e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$;

(4) $y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$; (5) $y=e^x+x^2$; (6) $y=-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{3}{2}e^x+x(x-1)e^x$.

习题 4-4

1. 269.3 cm/s^2　　2. $R=R_0e^{-\frac{\ln 2}{1\,600}t}$.

3. $v=\left(\frac{mg}{k}+v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$.　　4. $x=-\frac{A}{\omega^2m}\cos\omega t+\frac{A}{\omega^2m}+a$.

5. $x=\frac{m^2g}{c^2}e^{-\frac{c}{m}t}+\frac{mg}{c}t-\frac{m^2g}{c^2}$.　　6. $y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha x$.

章节测试四

一、1. B;　2. C;　3. D;　4. $\frac{1}{y}=a\ln|x+a-1|+C$;　5. $y=e^{-x}-e^{4x}$.

二、(1) $(1+e^x)\sec y=2\sqrt{2}$; (2) $y=\frac{C}{2}x^2+\frac{1}{2C}$; (3) $x=\frac{C}{\ln y}+\frac{1}{2}\ln y$;

(4) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{10}e^{3x}$; (5) $y=\arcsin(C_1e^x)+C_2$.

三、两个月.

四、$y=x^2+\frac{1}{x}$.

五、$a=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{N}$.

六、$y=C_1\ln x+C_2$.